புள்ளியியல் செய்முறை மாதிரிகள்

(பாகம் 1)

STATISTICS - PRACTICAL EXERCISES

(PART I)

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—791

புள்ளியியல் செய்முறை மாதிரிகள்

(முதல் பாகம்)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்
வே. சு. சௌந்தர பாண்டியன், எம். எஸ்சி.,
உதவிப் பேராசிரியர்,
புள்ளியியல் துறை, மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—February, 1978
Number of Copies—2000

T. N. T. B. S. (C. P.) No. 791

STATISTICS-PRACTICAL EXERCISES (PART-I)

V. S. SOUNDARA PANDIAN

Price Rs. 15.30

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture) New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by
Ravishankar Printers,
84, Perambur Barracks Road,
Madras—600 007.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேழாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத்திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப்பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதவியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இருவகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **புள்ளியியல் செய்முறை மாதிரிகள் (முதல் பாகம்)** என்னும் இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **791**ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **826** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ் ; எங்கும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

செ. அரங்கநாயகம்

பொருளடக்கம்

1. சராசரிகள் அல்லது மையநிலைப் போக்கு அளவைகள்

ஒரு பரவலில் அடங்கியுள்ள எல்லாவித அம்சங்களின் அளவுகளைப் பிரதிபலிக்கின்ற ஓர் உண்மை அளவே, கொடுக்கப் பட்ட பரவலின் சராசரி அல்லது மையநிலைப் போக்கு அளவு எனக் கூறப்படுகிறது.

அல்லது சராசரியை, கொடுக்கப்பட்ட எளிதில் பிரித் தாய்ந்து புரிந்துகொள்ள இயலாத புள்ளிவிவரத் தொகுதியின் மையக் கருத்தை அளந்து கூறக் கூடிய சுருக்க விளக்க எண் எனவும் கொள்ளலாம். வழக்கில் பயன்படுத்தப்படுகின்ற சில முக்கியச் சராசரிகள் :

(1) கூட்டுச் சராசரி
(2) இடைநிலை
(3) முகடு
(4) பெருக்குச் சராசரி
(5) ஹார்மானிக் சராசரி

என்பனவாகும்.

கூட்டுச் சராசரி
(Arithmetic Mean)

சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரியைக் கீழ்க்காணும் இரு முறை களில் கணக்கிடலாம் :

(1) நேரடி முறை, (2) சுருக்கு முறை

(அ) தனித்த தொகுதி

(1) நேரடி முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$

இங்கு, n = உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

x = உறுப்புகளின் அளவு.

(2) சுருக்கு முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{n}$

இங்கு, $dx = (x-A)$

(ஆ) தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி

(1) நேரடி முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

இங்கு, $n = \Sigma f$

f = அலைவெண்

(2) சுருக்கு முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

இங்கு, A = ஊகச் சராசரி

f = அலைவெண்

dx = ஊகச் சராசரியிலிருந்து கிடைத்த விலக்கம் $(x-A)$

n = அலைவெண்களின் கூடுதல்.

(இ) தொடர் தொகுதி

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$:

இங்கு, பிரிவுகளின் மத்திய மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு (பிரிவின் இரு எல்லைகளைக் கூட்டி இரண்டால் வகுத்து : உதாரணமாக $10-20$ என்ற பிரிவில் $\frac{10+20}{2} = 15$ என்பதைக் கொண்டு), அவைகளை x எனக் கொண்டு, கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ ஐத் தொடர்ச்சியற்ற தொகுதியில் கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரத்தின் மூலம் கணக்கிடுகிறோம்.

(ஈ) கூட்டுச் சராசரியைப் படிவிலக்க முறை மூலமாகவும் கணக்கிடுகிறோம்.

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$

இங்கு,
$\bar{x}$ = கூட்டுச் சராசரி
A = ஊகச் சராசரி
f = அலைவெண்
$d'x$ = படி விலக்கம் $\left(d'x = \frac{x-A}{C}\right)$
n = அலைவெண்களின் கூடுதல் $(n = \Sigma f_i)$
C = பிரிவு இடைவெளி அளவு

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி

(1) நேரடி முறை :

$$\text{நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி} = \frac{\Sigma x_i w_i}{\Sigma w_i}$$

இங்கு, x_i = 'x' என்ற 'மாறி' ஏற்கும் மதிப்புகள்
w_i = பளு

(2) சுருக்கு முறை :

$$\text{நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி} = A + \frac{\Sigma w\ dx}{\Sigma w}$$

இங்கு,
A = ஊகச் சராசரி
$dx = (x_i - A)$ விலக்கம்

சார்லியரின் சோதனை

$\Sigma (f)$ மொத்த அலைவெண் $= \Sigma [(f(d+1)] - \Sigma (fd)$
அல்லது
$\Sigma fd = [f(d+1)] - \Sigma f$

கூட்டல் முறையில் கூட்டுச் சராசரி காணல்

கூட்டுச் சராசரி (கூட்டல் முறை) :

$$x = M - C(F_1 - 1)$$

இங்கு,
M = கடைசிப் பிரிவின் மத்திய மதிப்பு
C = இடைவெளித் தூரம்
F_1 = குவி அலைவெண் கூட்டலை, அலை வெண் கூடுதலால் வகுத்தபின் கிடைத்த மதிப்பு.

இடைநிலை

(1) தனித்த தொகுதி

தனித்த தொகுதியின் இடைநிலை காண, முதலில் கொடுத்த உறுப்புகளை ஏறு வரிசை மதிப்பிலோ, அல்லது இறங்கு வரிசை மதிப்பிலோ எழுதவேண்டும். பின்பு கீழ்க்காணும் முறைப்படி இடைநிலையைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பாகும். சில நேரங்களில் $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ என்னும் மதிப்பு பின்னமாக வரலாம். உதாரணமாக, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ என்பது 12·5 எனக் கொண்டால், இடைநிலை

$$M_e = \frac{12\text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு} + 13\text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}}{2}$$

எனக் கணக்கிட வேண்டும்.

(2) தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி

இடைநிலையைக் கீழ்க்காணும் முறைப்படி கணக்கிட வேண்டும் :

(i) குவி அலைவெண் கணக்கிடல்.

(ii) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ஆவது உறுப்பின் மதிப்புக் கணக்கிடல்.

(iii) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு விழும் குவி அலைவெண்ணின் உறுப்பின் மதிப்பே இடைநிலையாகும்.

(iv) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு குவி அலைவெண்ணில் விழாவிட்டால், அதன் அடுத்த உயர் மதிப்புடைய உறுப்பின் மதிப்பை இடைநிலையாகக் கொள்ள வேண்டும்.

(3) தொடர் தொகுதி

(a) இடைநிலைச் சூத்திரம்

$$M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times l_2 - l_1$$

அல்லது $$M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$$

இங்கு, M_e = இடைநிலை.

n = அலைவெண்ணின் கூடுதல்

l_1 = இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ்வரம்பு

l_2 = இடைநிலைப் பிரிவின் மேல்வரம்பு

f = இடைநிலைப் பிரிவின் அலைவெண்

m = இடைநிலைப் பிரிவிற்கு அடுத்த முந்திய பிரிவின் திரள் அலைவெண்

C = பிரிவு இடைவெளி அளவு, $(l_2 - l_1)$

(b) இடைநிலை கணக்கிடும் இரண்டாவது சூத்திரம்

$$M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n}{2} - m\right)}{f} \times C$$

இங்கு, M_e = இடைநிலை

n = அலைவெண்ணின் கூடுதல் (Σf)

l_1 = இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ்வரம்பு

f = இடைநிலைப் பிரிவின் அலைவெண்

m = இடைநிலைப் பிரிவிற்கு அடுத்த, முந்திய பிரிவின் திரள் அலைவெண்

C = பிரிவு இடைவெளி அளவு

(c) இடைநிலை கணக்கிடும் மூன்றாவது சூத்திரம்

$$M_e = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - F\right)}{f} \times C$$

இங்கு, L = இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ்வரம்பு

f = இடைநிலைப் பிரிவின் அலைவெண்

C = பிரிவு இடைவெளி அளவு

F = இடைநிலைப் பிரிவிற்கு முந்திய அலைவெண்ணின் கூடுதல்

N = அலைவெண்களின் கூடுதல்

பிரிவுப் புள்ளிவிவரப் பரவலுக்கு இடைநிலை (M_e) காண இன்னும் சில சூத்திரங்கள் இருக்கின்றன. ஆனால் (*a*) முதல் சூத்திரமே சாதாரணமானதாகவும், உயரியதாகவும் கொண்டு இடைநிலை கணக்கிடப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

இடைநிலையை ஒத்த சில அளவைகள்
கால்மானங்கள் (Quartiles); பத்துமானங்கள் (Deciles); நூற்றுமானங்கள் (Percentiles)

தனித்த தொகுதி

கால்மானங்கள் :

முதல் கால்மானம்

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.}$$

இரண்டாவது கால்மானம்

$$Q_2 = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.}$$

மூன்றாவது கால்மானம்

$$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.}$$

பத்துமானங்கள் :

முதல் பத்துமானம்

$$D_1 = \left(\frac{N+1}{10}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.}$$

இரண்டாவது பத்துமானம்

$$D_2 = 2\left(\frac{N+1}{10}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.}$$

மூன்றாவது பத்துமானம்

$$D_3 = 3\left(\frac{N+1}{10}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.}$$

....

ஒன்பதாவது பத்துமானம்

$$D_9 = 9\left(\frac{N+1}{10}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.}$$

நூற்றுமானங்கள் :

முதல் நூற்றுமானம்

$$P_1 = \left(\frac{N+1}{100}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.}$$

இரண்டாவது நூற்றுமானம் $P_2 = 2\left(\frac{N+1}{100}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.

மூன்றாவது நூற்றுமானம் $P_3 = 3\left(\frac{N+1}{100}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.

....

தொண்ணூற்றொன்பதாவது நூற்றுமானம்

$$P_{99} = 99\left(\frac{N+1}{100}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.}$$

தொடர் தொகுதி

கால்மானங்கள் :

முதல் கால்மானம் $Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$

இரண்டாவது கால்மானம் $Q_2 = l_1 + \frac{2\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$

மூன்றாவது கால்மானம் $Q_3 = l_1 + \frac{3\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$

பத்துமானங்கள் :

முதல் பத்துமானம் $$D_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{10}\right) - m}{f} \times C$$

இரண்டாவது பத்துமானம் $$D_2 = l_1 + \frac{2\left(\frac{n+1}{10}\right) - m}{f} \times C$$

....

ஒன்பதாவது பத்துமானம் $$D_9 = l_1 + \frac{9\left(\frac{n+1}{10}\right) - m}{f} \times C$$

நூற்றுமானங்கள் :

முதல் நூற்றுமானம் $$P_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{100}\right) - m}{f} \times C$$

இரண்டாவது நூற்றுமானம் $$P_2 = l_1 + \frac{2\left(\frac{n+1}{100}\right) - m}{f} \times C$$

....

தொண்ணூற்றொன்பதாவது நூற்றுமானம்

$$P_{99} = l_1 + \frac{99\left(\frac{n+1}{100}\right) - m}{f} \times C$$

முகடு
(Mode)

'ஒரு தொகுதியில் எந்த மதிப்பானது கூடுதல் தடவைகள் நிகழ்கின்றதோ, அந்த அளவே அத் தொகுதியின் முகடு ஆகும்.'

(1) தனித்த தொகுதி

ஒரு தொகுதியில் கூடுதல் தடவைகள் நிகழும் அல்லது இடம் பெறும் உறுப்பு மதிப்பே முகடாதலால், தனித்த தொகுதியில் முகட்டைப் பார்த்த அளவிலேயே கண்டுகொள்ளலாம்.

(2) தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி

தொடர்ச்சியற்ற தொகுதியில் முகட்டைப் பிரிவுபடுத்தும் முறை (Grouping Method) மூலம் காணலாம்.

பிரிவுபடுத்தும் முறை

அலைவெண் பத்தியையும் சேர்த்து ஆறு பத்திகளை உண்டாக்க வேண்டும்.

(i) முதல் பத்தியில், பார்த்த அளவிலேயே அதிக அலைவெண் உடைய உறுப்பின் அளவை முகடாகக் காண்கிறோம்.

(ii) இரண்டாவது பத்தியில், மேலே இருந்து இரண்டிரண்டு அலைவெண்களாகக் கூட்டி மொத்த அலைவெண்களை எழுதுகிறோம். கூடுதலான அலைவெண் கொண்ட உறுப்பைக் குறித்துக் கொள்கிறோம்.

(iii) மூன்றாவது பத்தியில், இரண்டாம் பத்தியில் கணக்கிட்டபடி, இரண்டிரண்டாகக் கூட்டி முதல் அலைவெண்ணை விட்டு விட்டுக் கூட்டி எழுதுகிறோம்.

(iv) நான்காவது பத்தியில், மேலே இருந்து மூன்று மூன்று அலைவெண்களாகக் கூட்டி மொத்த அலைவெண்களை எழுதுகிறோம். கூடுதலான அலைவெண் கொண்ட உறுப்பைக் குறித்துக் கொள்கிறோம்.

(v) ஐந்தாவது பத்தியில், நான்காவது பத்தியில் கணக்கிட்டபடி மூன்று மூன்றாக, முதல் அலைவெண்ணை விட்டுவிட்டுக் கூட்டி எழுதுகிறோம். கூடுதலான அலைவெண் கொண்ட உறுப்பைக் குறித்துக் கொள்கிறோம்.

(vi) ஆறாவது பத்தியில், மூன்றாவது அலைவெண்ணிலிருந்து, முன்பு செய்ததுபோல மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி எழுதுகிறோம். கடைசியாகக் கூடுதலான தடவை அடிக்கடி வரும் உறுப்பின் அளவைக் கண்டு அதை முகடாகக் கொள்கிறோம்.

தொடர் தொகுதி

முகடு காணும் சூத்திரம் :

(1) முகடு $M_0 = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times C$

இங்கு, M_o = முகடு

l_1 = முகட்டுப் பிரிவின் உண்மைக் கீழ்வரம்பு

f_0 = முகட்டுப் பிரிவிற்கு முந்திய பிரிவின் அலைவெண்

f_1 = முகட்டுப் பிரிவின் அலைவெண்

f_2 = முகட்டுப் பிரிவிற்குப் பிந்திய பிரிவின் அலைவெண்

C = முகட்டுப் பிரிவின் இடைவெளியளவு (l_2-l_1)

(2) முகடு $M_o = l_1 + \frac{f_2}{f_2+f_0}(l_2-l_1)$

(3) முகடு $M_o = L + \frac{N_2}{N_1+N_2} \times I$

இங்கு, L = முகட்டுப் பிரிவின் உண்மைக் கீழ்வரம்பு

N_2 = பிந்திய பிரிவின் அலைவெண்

N_1 = முந்திய பிரிவின் அலைவெண்

I = இடைவெளி அளவு

(4) முகடு $M_o = l_2 - \frac{N_0}{N_2+N_0} \times I$

(5) முகடு $M_o = 3\ M_e - 2\ \bar{x}$

= 3 இடைநிலை — 2 கூட்டுச் சராசரி

மேற்கண்ட முகடு காணும் சூத்திரங்களில் முதல் சூத்திரமே சாதாரணமானதாகவும் உயரியதாகவும் கொண்டு பயன்படுத்தப் படுகிறது.

பெருக்குச் சராசரி
(Geometric Mean)

சாதாரணப் பெருக்குச் சராசரி $G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ldots \times x_n}$

அல்லது $G = \left[\frac{\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n}{n}\right]$-ன் எதிர்மடக்கை

அல்லது $\log G = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n}{n}$

அல்லது $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்பனவற்றிற்கு G கணக்கிடவேண்டும்.

n = உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

அலைவெண் பரவலுக்கு (தொடர் தொகுதி)

$$\text{பெருக்குச் சராசரி } G = \left(x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times x_3^{f_3} \times \ldots \times x_n^{f_n}\right)^{\frac{1}{N}}$$

இங்கு, x = மாறி

f = அலைவெண்

N = அலைவெண்களின் கூடுதல்

மடக்கை வழியில் காணும் பெருக்குச் சராசரி

$$\log G = \frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n \log x_n}{N}$$

அல்லது $\log G = \dfrac{\Sigma f_i \log x_i}{N}$

அல்லது $G = \left\{\dfrac{\Sigma f_i \log x_i}{N}\right\}$ -ன் எதிர்மடக்கை.

நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி

$$WG = \sqrt[n]{a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdot a_3^{w_3} \ldots\ldots a_n^{w_n}}$$

அல்லது $WG = \left[\dfrac{w_1 \log a_1 + w_2 \log a_2 + \ldots + w_n \log a_n}{n}\right]$-ன் எதிர்மடக்கை

ஹார்மானிக் அல்லது இசைச் சராசரி (Hormonic Mean)

சாதாரண ஹார்மானிக் அல்லது

$$\text{இசைச் சராசரி } H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_n}}$$

அல்லது $H = \text{தலைகீழ்ப் பின்னம்} \left\{\dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_n}}{n}\right\}$

இங்கு $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்பவற்றிற்கு H கணக்கிட வேண்டும்.

n = உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

அலைவெண் பரவலுக்கு (தொடர் தொகுதி)

ஹார்மானிக் (இசைச்) சராசரி $H = \dfrac{n}{\dfrac{f_1}{x_1} + \dfrac{f_2}{x_2} + \dfrac{f_3}{x_3} + \dots \dfrac{f_n}{x_n}}$

அல்லது $H = \dfrac{n}{\left(\Sigma f_i \times \dfrac{1}{x_i}\right)}$

அல்லது $H = \dfrac{\left(\Sigma f \times \dfrac{1}{x}\right)}{n}$ -ன் தலைகீழ்ப் பின்னம்

நிறையிட்ட ஹார்மானிக் (இசைச்) சராசரி

$$W.H. = \frac{\Sigma w}{\dfrac{w_1}{x_1} + \dfrac{w_2}{x_2} + \dots\dots + \dfrac{w_n}{x_n}}$$

அல்லது $W.H. = \dfrac{\left(\Sigma \dfrac{w_i}{x_i}\right)}{\Sigma w_i}$ -ன் தலைகீழ்ப் பின்னம்.

இருவிசைப்படிச் சமன்பாட்டுச் சராசரி (Quadratic Mean)

$$Q.M. = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots\dots + x_n^2}}{n}$$

அல்லது $Q.M. = \dfrac{\sqrt{\Sigma x_i^2}}{n}$

இங்கு, $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ = 'x' என்ற மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள்

n = உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

நகரும் சராசரி (Moving Average)

(i) 3 ஆண்டு நகரும் சராசரி :

$$\frac{a+b+c}{(n=3)}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+e}{3}, \frac{d+e+f}{3}, \dots\dots$$

(ii) 5 ஆண்டு நகரும் சராசரி :

$$\frac{a+b+c+d+e}{(n=5)}, \frac{b+c+d+e+f}{5}, \frac{c+d+e+f+g}{5}, \ldots\ldots$$

கூடிச்செல் சராசரி
(Progressive Average)

இது, வரும் ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் கிடைக்கும் மதிப்புகளைக் கணக்கில் கொண்டு கணக்கிடப்படும் சராசரி ஆகும். ஆகவே கூடிச்செல் சராசரி

$$P.A. = \frac{a+b}{2}; \frac{a+b+c}{3}; \frac{a+b+c+d}{4}; \frac{a+b+c+d+e}{5}; \ldots\ldots$$

இங்கு $a, b, c, d\ldots$ என்பன ஒரு நிறுவனத்தின் வெவ்வேறு ஆண்டுகளில் இலாப ரூபாய்களாகும்.

காம்போசிட் சராசரி
(Composite Average)

$$C.A. = \frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l}{(n=12)}$$

இங்கு $a, b, c, d\ldots\ldots k, l$ என்பன ஒரு விற்பனை நிறுவனத்தின் மாத விற்பனை அளவுகள்.

இதுபோல் ஒரு நிறுவனத்தின் வெவ்வேறு ஆண்டுகளின் மாத விற்பனை அளவுகள் கிடைப்பின், அவற்றின் வெவ்வேறு ஆண்டுகளின் மாத விற்பனையின் சராசரி

$$= \frac{A+B+C+D+\ldots\ldots+N}{n}$$

இங்கு, n = உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$A, B, C, D\ldots\ldots N$ வெவ்வேறு ஆண்டுகளின் மாத விற்பனையின் ஆண்டுச் சராசரிகளாகும்.

இவைகளே காம்போசிட் சராசரி (Composite Average) என்பனவாகும்.

சராசரிகளின் ஒப்புமை

I. தோராயமான ஒப்புமை

(1) இடைநிலை = கூட்டுச் சராசரி —

$\frac{2}{3}$ (கூட்டுச் சராசரி—முகடு)

(2) முகடு = 3 இடைநிலை — 2 கூட்டுச் சராசரி

(3) கூட்டுச் சராசரி = $\frac{1}{2}$ (3 இடைநிலை — முகடு)

II. ஒப்புமை

(1) கூட்டுச் சராசரி $\geqslant$ பெருக்குச் சராசரி $\geqslant$ இசைச் சராசரி

(2) பெருக்குச் சராசரி $= \sqrt[2]{\text{கூட்டுச் சராசரி} \times \text{இசைச் சராசரி}}$

இஃது இரண்டு எண்களுக்குத்தான் பொருந்தும்.

கூட்டுச் சராசரி

மாதிரி 1

ஒரு கிளை வங்கியின் வேலையாள்களின் மாதச் சம்பளங்கள் (ரூபாயில்) கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

10, 17, 29, 95, 95, 100, 100, 175, 250, 750

கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடு.

(பி.காம்., காசி—1945)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரிச் சூத்திரம் $= \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

இங்கு Σ கூட்டலைக் குறிக்கிறது.

x = உறுப்புகளின் அளவு

n = உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

ஆகவே கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{10+17+29+95+95+100+100+175+250+750}{10}$$

$$= \frac{1621}{10}$$

$$= 162{\cdot}1$$

ஆகவே, மாதச் சம்பளங்களின் கூட்டுச் சராசரி = 162·1

மாதிரி 2

1941ஆம் ஆண்டு மக்கள்தொகைக் கணிப்பின்படி, 10 நகரங்களின் மக்கள்தொகை விவரங்களைக் கீழே காண்கின்றோம் :

2488, 1490, 277, 733, 522, 672, 591, 407, 387, 391.

கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடு.

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரிச் சூத்திரம் $= \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

இங்கு Σ கூட்டலைக் குறிக்கிறது.

x = உறுப்புகளின் அளவு.

n = உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

ஆகவே, கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ =

$$\frac{2488+1490+277+733+522+672+591+407+387+391}{10}$$

$$= \frac{7958}{10}$$

$$= 795{\cdot}8$$

ஆகையால், 10 நகரங்களின் மக்கள்தொகையின் கூட்டுச் சராசரி = **795·8**

மாதிரி 3

கீழ்க்கண்ட புள்ளிவிவரத்துக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பு எண்கள்	25	30	20	15	15	35	40	25	45	50

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

வரிசை எண்	மதிப்பு எண்கள் x	விலக்கம் dx $(= x - 35)$
1	25	−10
2	30	− 5
3	20	−15
4	15	−20
5	15	−20
6	35	0
7	40	5
8	25	−10
9	45	10
10	50	15
$n = 10$	$\Sigma x = 300$	$\Sigma dx = -50$

நேரடி முறை :

$$\text{கூட்டுச் சராசரிச் சூத்திரம்} = x = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$= \frac{300}{10}$$

$$= 30 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

சுருக்கு முறை :

$$\text{கூட்டுச் சராசரிச் சூத்திரம்} = \overline{x} = A + \frac{\Sigma dx}{n}$$

$$= 35 + \left(\frac{-50}{10}\right)$$

$$= (35-5)$$

$$= 30 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

(குறிப்பு : $\overline{x}$ = கூட்டுச் சராசரி ; A = ஊகச் சராசரி = 35)

மாதிரி 4

ஓரிடத்தில் வசிக்கும் 10 குடும்பங்களின் மாத வருமானத்தைக் கீழ் வரும் பட்டியல் தருகிறது.

குடும்பம்	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
வருமானம்	85	70	10	75	500	8	42	250	40	36

கூட்டுச் சராசரியை, (1) நேரடி முறை, (2) சுருக்கு முறை மூலம் கணக்கிடுக.

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1945)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

குடும்பங்கள்	வருமானம் x	ஊகச் சராசரி ($A=100$)யிலிருந்து விலக்கம் dx
A	85	—15
B	70	—30
C	10	—90
D	75	—25
E	500	400
F	8	—92
G	42	—58
H	250	150
I	40	—60
J	36	—64
	$\Sigma x_i = 1116$	$\Sigma dx = 116$

(i) நேரடி முறை :

$$\text{கூட்டுச் சராசரிச் சூத்திரம்} = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$= \frac{1116}{10}$$

$$= \text{ரூ. } 111{\cdot}6$$

(ii) சுருக்கு முறை :

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} \quad \bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{n}$$

$$= 100 + \left(\frac{116}{10}\right)$$

$$= 100 + 11{\cdot}6$$

$$= 111{\cdot}6$$

ஆகவே, குடும்பத்தின் மாத வருமானம் = ரூ. 111·6

மாதிரி 5

ஒரு தொழிற்சாலையில் பணி புரியும் 10 தொழிலாளர்களின் மாத ஊதியம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கூட்டுச் சராசரியை, (i) நேரடி முறை, (ii) சுருக்கு முறை ஆகியவற்றின் மூலம் காண்.

தொழிலாளர்கள்	அ	ஆ	இ	ஈ	உ	ஊ	எ	ஏ	ஐ	ஒ
மாத ஊதியம் (ரூபாயில்)	240	245	235	243	247	260	261	249	268	242

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

தொழிலாளர்கள்	மாத ஊதியம் (ரூபாயில்) x	ஊகச் சாரசரி (A 247) யிலிருந்து விலக்கம் dx
அ	240	— 7
ஆ	245	— 2
இ	235	—12
ஈ	243	— 4
உ	247	0
ஊ	260	13
எ	261	14
ஏ	249	2
ஐ	268	21
ஒ	242	— 5
$n=10$	2490	$\Sigma dx=20$

(i) நேரடி முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

$$= \frac{2490}{10}$$

$$= 249$$

(ii) சுருக்கு முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma lx}{n}$

$$= 247 + \frac{20}{10}$$

$$= 247+2$$

$$= 249$$

ஆகவே, தொழிலாளர்களின் மாத ஊதியத்தின் கூட்டுச் சராசரி = ரூ. **249.**

மாதிரி 6

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் 25 மாணவர்கள் அடங்கிய குழு ஒன்று பொருளாதாரம், அரசியல் என்ற இரு பாடங்களில், ஒரு வகுப்புத் தேர்வில் எடுத்த மதிப்பெண்களைத் தருகிறது. கூட்டுச் சராசரி கணக்கிட்டு ஒப்பிடுக.

வரிசை எண்	பொருளாதாரம்	அரசியல்	வரிசை எண்	பொருளாதாரம்	அரசியல்
1	29	36	13	46	80
2	65	30	14	47	44
3	33	38	15	60	85
4	45	39	16	30	20
5	51	64	17	32	32
6	72	50	18	52	25
7	48	46	19	54	55
8	33	15	20	56	28
9	42	42	21	58	53
10	25	10	22	49	35
11	28	72	23	38	40
12	35	33	24	40	62
			25	46	58

(எம். ஏ. சென்னை—1947)

தீர்வு :

பொருளாதாரம் அரசியல் ஆகிய பாடங்களின் கூட்டுச் சராசரி காணல் :

வரிசை எண்	பொருளாதாரம்		அரசியல்	
	மதிப் பெண்கள் (x)	ஊகச் சராசரி (A=40) யிலிருந்து விலக்கம் dx	மதிப் பெண்கள் (y)	ஊகச் சராசரி (B=40) யிலிருந்து விலக்கம் dy
1	29	−11	36	− 4
2	65	25	30	−10
3	33	− 7	38	− 2
4	45	5	39	− 1
5	51	11	65	25
6	72	32	50	10
7	48	8	46	6
8	33	− 7	15	−25
9	42	2	42	2
10	25	−15	10	−30
11	28	−12	72	32
12	35	− 5	33	− 7
13	46	6	80	40
14	47	7	44	4
15	60	20	85	45
16	30	−10	20	−20
17	32	− 8	32	− 8
18	52	12	25	−15
19	54	14	55	15
20	56	16	28	−12
21	58	18	53	13
22	49	9	35	− 5
23	38	− 2	40	0
24	40	0	62	22
25	46	6	58	18
$n=25$	$1114=\Sigma x$	$\Sigma dx=114$	$\Sigma y=1093$	$\Sigma dy=103$

(i) நேரடி முறை :

பொருளாதாரப் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{1114}{25}$$

$$= \mathbf{44{\cdot}56}$$ **மதிப்பெண்கள்**

அரசியல் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n}$$

$$= \frac{1093}{25}$$

$$= \mathbf{43{\cdot}72}$$ **மதிப்பெண்கள்.**

(ii) சுருக்கு முறை :

பொருளாதாரப் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{n}$$

$$= 40 + \frac{114}{25}$$

$$= 40 + 4{\cdot}56$$

$$= \mathbf{44{\cdot}56}$$ **மதிப்பெண்கள்**

அரசியல் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{y} = B + \frac{\Sigma dy}{n}$$

$$= 40 + \frac{93}{25}$$

$$= 40 + 3{\cdot}72$$

$$= \mathbf{43{\cdot}72}$$ **மதிப்பெண்கள்**

ஆகவே,

பொருளாதாரப் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி } = **44·56** மதிப்பெண்கள்

அரசியல் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி } = **43·72** மதிப்பெண்கள்

மாதிரி 7

(i) நேரடி முறை (ii) சுருக்கு முறை ஆகியவற்றில் கீழ்க் கண்ட பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்.

மாறி x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
அலைவெண் (f)	20	43	75	67	72	45	39	9	8	6

(பி.சி.எஸ்—1954)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

மாறி (x)	அலை வெண் (f)	பெருக்கல் (fx)	ஊகச் சராசரி $(A=25)$ யிலிருந்து விலக்கம் $dx(=x-25)$	படி விலக்கம் $\left(d'x=\frac{dx}{5}\right)$ விலக்கங்கள் $(c=5)$ ஆல் வகுக்கப் படுகிறது	பெருக்கல் fdx
5	20	100	—20	—4	—80
10	43	430	—15	—3	—129
15	75	1125	—10	—2	—150
20	67	1340	—5	—1	—67
25	72	1800	0	0	0
30	45	1350	5	1	45
35	39	1365	10	2	78
40	9	360	15	3	27
45	8	360	20	4	32
50	6	300	25	5	30
	$\Sigma f = 384$	5380			$\Sigma fd'x = 214$

(i) நேரடி முறை :

கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f dx}{\Sigma f}$$

$$= \frac{\Sigma f dx}{n}$$

$$= \frac{8530}{384}$$

$$= \mathbf{22 \cdot 2}$$

சுருக்கு முறை :

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx}{n} \times C$$

$$= 25 + \frac{214}{384} \times 5$$

$$= 25 \frac{214}{384} \times 5$$

$$= 25 - 2 \cdot 8$$

$$= \mathbf{22 \cdot 2}$$

மாதிரி 8

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஒரு விற்பனை நிலையத்தில் ஒரு வாரம் விற்பனையான காலணிகளின் அளவுகளைத் தருகிறது.

(i) நேரடி முறை, (ii) சுருக்க முறை ஆகியவற்றில் கூட்டுச் சராசரி அளவைக் கணக்கிடுக.

காலணிகளின் அளவு	4 5	5	5·5	6	6·5	7	7·5	8	8·5	9	9·5	10	10·5	11
ஜோடிகளின் எண்ணிக்கை	1	2	4	5	15	30	60	95	82	75	44	25	15	4

(எம். ஏ. கல்கத்தா—1936)

தீர்வு :

(i) நேரடி முறை :

கூட்டுச் சராசரிச் சூத்திரம் $= \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

$$= \frac{\Sigma fx}{n}$$

இங்கு, $x =$ மாறி ; $f =$ அலைவெண் ; $n = \Sigma f =$ அலைவெண் கூடுதல்; $\Sigma fx =$ பெருக்கலின் கூடுதல்

(ii) சுருக்க முறை :

$$\text{கூட்டுச் சராசரிச் சூத்திரம்} = \bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$$

இங்கு, A = ஊகச் சராசரி; f = அலைவெண் ; $n = \Sigma f$ = அலைவெண் கூடுதல்; $dx = (x - A)$ ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கம்

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

காலணி அளவு (x)	சோடிகளின் எண்ணிக்கை (f)	பெருக்கல் (fx)	ஊகச் சராசரி $(A = 7{\cdot}5)$ யிலிருந்து விலக்கம் (dx)	விலக்கங்களின் பெருக்கல் (fdx)
4·5	1	4·5	—3	—3
5	2	10	—2·5	—5
5·5	4	22	—2	—8
6	5	30	—1·5	—1·5
6·5	15	97·5	—1	—15
7	30	210	—0·5	—15
7·5	60	450	0	0
8	95	760	0·5	47·5
8·5	82	697	1	82
9	75	675	1·5	112·5
9·5	44	418	2	88
10	25	250	2·5	62·5
10·5	15	157·5	3	45
11	4	44	3·5	14
	$\Sigma f = 457 = n$	$\Sigma fx = 3825{\cdot}5$		$\Sigma fdx = 398$

(i) நேரடி முறை :

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{3825{\cdot}5}{457} = 8{\cdot}37$$

(ii) சுருக்கு முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx}{x}$

$= 7{\cdot}5 + \frac{398}{457}$

$= 7{\cdot}5 + 87$

$= 8{\cdot}37$

மாதிரி 9

$x =$ நகரசபைச் சொத்து வரியின் சதவீதம் ,

$f =$ இம் முறைப்படி வரி விதிக்கும் நகரசபைகளின் எண்ணிக்கை என இருக்கும் கீழ்க்கண்ட பரவலின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்.

x	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10	10—11	11—12
f	10	22	39	21	15	9	4

(பி. ஏ- சென்னை-1971)

தீர்வு : கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

பிரிவுகள்	மத்திய மதிப்பு x	f	ஊகச் சராசரி ($A=8{\cdot}5$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	பெருக்கல்
5 —6	5·5	10	—3	—30
6 —7	6·5	22	—2	—44
7 —8	7·5	39	—1	—39
8 —9	8·5	21	0	0
9—10	9·5	15	1	15
10—11	10·5	9	2	18
11—12	11·5	4	3	12
		$\Sigma f = 120 = n$		$\Sigma f dx = -68$

கூட்டுச் சராசரி காணும் சூத்திரம் $= \bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx}{n}$

$= 8{\cdot}5 + \frac{-68}{120}$

$= 8{\cdot}5 - 5.566$

$= \mathbf{2{\cdot}84}$

மாதிரி 10

கீழ்க்கண்ட முயற்சித் தேர்வின் முடிவுகளின் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்.

சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கை	0—5	6—11	12—17	18—23	24—29	30—35
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	13	28	49	38	10

(பி. எஸ்ஸி.-சென்னை-1947)

தீர்வு : கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல்:

பிரிவு கள்	மத்திய மதிப்பு (x)	அலை வெண் (f)	பெருக் கல் $(f \times x)$	ஊகச் சராசரி $(A = 145)$ லிருந்து விலக்கம் dx	படி விலக்கம் $d'x$ $\left(= \frac{dx}{6}\right)$	பெருக் கல் $fd'x$
0—5	2·5	2	5·0	—12	— 2	— 4
6—11	8·5	13	110·5	— 6	— 1	—13
12—17	14·5	28	406·0	0	0	0
18—23	20·5	49	1004·5	6	1	49
24—29	26·5	38	1007 0	12	2	76
30—35	32·5	10	325·0	18	3	30
		140	2858.0			138

(i) நேரடி முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma f x}{n}$

$= \frac{2858}{140}$

$= 20{\cdot}414$ (தோராயமாக)

(ii) சுருக்க முறை :

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$$

$$= 14{\cdot}5 + \frac{138}{140} \times C$$

$$= 14{\cdot}5 + 5{\cdot}914$$

$$= \mathbf{20{\cdot}414} \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 11

கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்.

பிரிவு	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
அலைவெண்	7	19	43	52	40	15	3

(பி. எஸ்ஸி-சென்னை-1972.)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு (x)	அலைவெண் (f)	பெருக்கல் $f \times x$	ஊகச் சராசரி ($A = 27{\cdot}5$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	படி விலக்கம் $d'x$ $\left(= \frac{dx}{5}\right)$	பெருக்கல் $fd'x$
10—15	12·5	7	87·5	—15	—3	—21
15—20	17·5	19	332·5	—10	—2	—38
20—25	22·5	43	967·5	— 5	—1	—42
25—30	27·5	52	1430·0	0	0	0
30—35	32·5	40	1300·0	5	1	40
35—40	37·5	15	562·5	10	2	30
40—45	43·5	3	127·5	15	3	9
		$n = 179$	4807·5			$\Sigma fd'x = -23$

(i) நேரடி முறை :

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } x = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$= \frac{4807{\cdot}5}{179}$$

$$= \mathbf{26{\cdot}86}$$

(ii) சுருக்கு முறை :

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$$

$$= 27{\cdot}5 + \frac{-29}{179} \times 5$$

$$= 27{\cdot}5 - 0{\cdot}64$$

$$= \mathbf{26{\cdot}86}$$

மாதிரி 12

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஒரு தொழிற்சாலையில் ஒரு தொழிலாளர் குழுவின் வயதுப் பரவலைத் தருகிறது.

வயது	20—25	25—30	30—35	35—40
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	25	35	55	90
வயது	40—45	45—50	50—55	55—60
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	75	59	41	20

மேற்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்.

(பி. ஏ. சென்னை-1972.)

தீர்வு :

வயது	மத்திய மதிப்பு x	அலை வெண் f	பெருக்கல் fx	ஊகச் சராசரி $(A=37{\cdot}5)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx	படி விலக்கம் $d'x$ $\left(=\frac{dx}{5}\right)$	பெருக்கல் $fd'x$
20—25	22·5	25	562·5	—15	—3	—75
25—30	27·5	35	962·5	—10	—2	—70
30—35	32·5	55	1787·5	— 5	—1	—55
35—40	37·5	90	3375·0	0	0	0
40—45	42·5	75	3187·5	5	1	75
45—50	47·5	59	2802·5	10	2	118
50—55	52·5	41	2152·5	15	3	123
55—60	57·5	20	1150·0	20	4	80
மொத்தம்		400	15980·0			196

(i) நேரடி முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{15980{\cdot}0}{400}$

$= \mathbf{39{\cdot}95}$

(ii) சுருக்கு முறை :

கூட்டுச் சராசரி $x = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$

$= 37{\cdot}5 + \frac{196}{400} \times 5$

$= 37{\cdot}5 + 2{\cdot}45$

$= \mathbf{39{\cdot}95}$

ஆகவே தொழிலாளர்களின்
கூட்டுச் சராசரி வயது = 39·95 ஆண்டுகள்,

மாதிரி 13

கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவல் 100 மனிதர்களின் வயதைக் குறிக்கிறது. கூட்டுச் சராசரி காண்.

வயது (சென்ற பிறந்த நாள்படி)	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
எண்ணிக்கை	4	20	38	24	10	4

(எம். ஏ.அண்ணாமலை-1962)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் ;

பிரிவு இடைவெளி	மத்திய மதிப்பு (x)	எண்ணிக்கை (f)	ஊகச் சராசரி $(A=27{\cdot}5)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx	படி விலக்கம் $d'x$ $\left(=\frac{dx}{5}\right)$	பெருக்கல் $fd'x$
15—20	17·5	4	—10	—2	— 8
20—25	22·5	20	— 5	—1	—20
35—30	27·5	38	0	0	0
30 – 35	32·5	24	5	1	24
35—40	37·5	10	10	2	20
40—45	42·5	4	15	3	12
		$n=100$			$\Sigma fd'x=28$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } x = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$$

$$= 27{\cdot}5+\frac{28}{100} \times C$$

$$= 27{\cdot}5 + \frac{140}{100}$$

$$= 27{\cdot}5 + 1{\cdot}4$$

$$= 28{\cdot}9$$ ஆண்டுகள்

ஆகவே கூட்டுச்

சராசரி வயது = 28·9 ஆண்டுகள்

மாதிரி 14

கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைச் சுருக்க முறையில் காண்.

மாறி (x)	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
அலைவெண் (f)	1	2	4	8	11	10	7	4	2	1

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

மாறி (x)	அலைவெண் (f)	விலக்கம் (dx)	பெருக்கல் (fdx)
20	1	5	5
19	2	4	8
18	4	3	12
17	8	2	16
16	11	1	11
15	10	0	0
14	7	− 1	− 7
13	4	− 2	− 8
12	2	− 3	− 6
11	1	− 4	− 4
	$n = 50$		27

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$$

$$= 15 + \frac{27}{50}$$

$$= 15 + 0{\cdot}54$$

$$= 15{\cdot}54 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி 15

கீழ்க் காணும் கரும்பு விளைச்சலின் (ஏக்கருக்கு—டன்னில்) அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்.

பிரிவு இடைவெளி (x)	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60
அலைவெண் (f)	7	8	12	26	32
பிரிவு இடைவெளி (x)	60—65	65—70	70—75	75—80	80—85
அலைவெண் (f)	42	42	15	17	9

(எம்.ஏ.—இராஜஸ்தான்—1949)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

பிரிவு இடைவெளி	மத்திய மதிப்பு (x)	அலைவெண் (f)	ஊகச் சராசரி (A = 57·5) யிலிருந்து விலக்கம் dx	பெருக்கல் f dx
35—40	37·5	7	—20	—140
40—45	42·5	8	—15	—120
45—50	47·5	12	—10	—120
50—55	52·5	26	— 5	—130
55—60	57·5	32	0	0

பிரிவு இடைவெளி	மத்திய மதிப்பு (x)	அலைவெண் (f)	ஊகச் சராசரி $(A = 57{\cdot}5)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx	பெருக்கல் $fd'x$
60—65	62·5	42	5	210
65—70	67·5	42	10	420
70—75	72·5	15	15	225
75—80	77·5	17	20	340
80—85	82·5	9	25	225
		$n = 210$		$\Sigma\, fdx = 910$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma\, fdx}{n}$

$$= 57{\cdot}5 + \frac{910}{210}$$

$$= 57{\cdot}5 + 4{\cdot}33$$

$$= 61{\cdot}83$$ (தோராயமாக)

மாதிரி 16

794 கார்ன் பயிர்களின் நீளப் பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

நீளம் (அங்குலத்தில்)	4·0	4·5	5	5·5	6	6·5	7
கார்ன்களின் எண்ணிக்கை	1	1	8	33	70	110	170
நீளம் (அங்குலத்தில்)	7·5	8	8·5	9	9·5	10	
கார்ன்களின் எண்ணிக்கை	172	124	64	32	10	2	

இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி காண். (சென்னை—பல்கலை)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல்:

நீளம் (அங்குலத்தில்) (x)	கார்களின் எண்ணிக்கை (f)	ஊகச் சராசரி $(A=7\cdot0)$ யிலிருந்து விலக்கம் (dx)	படி விலக்கம் $d'x$ $\left(d'x = \frac{dx}{\cdot5}\right)$	பெருக்கல் $fd'x$
4·0	1	−3·0	−6	− 6
4·5	1	−2·5	−5	− 5
5·0	8	−2·0	−4	− 32
5·5	33	−1·5	−3	− 99
6·0	70	−1·0	−2	−140
6·5	110	−0·5	−1	−110
7·0	170	0	0	0
7·5	172	0·5	1	172
8·0	124	1·0	2	248
8·5	61	1·5	3	183
9·0	32	2·0	4	128
9·5	10	2·5	5	50
10·0	2	3·0	6	12
	$n = 794$			$\Sigma fd'x = 401$

கூட்டுச் சராசரி $\overline{x} = A + \frac{\Sigma f d' x}{n} \times C$

$$= 7{\cdot}0 + \frac{401}{794} \times 0{\cdot}5$$

$$= 7{\cdot}0 + 0{\cdot}25$$

$$= 7{\cdot}25$$

மாதிரி 17

கீழ் உள்ள புள்ளி விவர அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
155—157	4
158—160	8
161—163	26
164—166	53
167—169	89
170—172	62
173—175	48
176—178	14
179—181	6

(பி.ஏ.-மதுரை-1970)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

பிரிவு இடைவெளி	மூடிய பிரிவு இடைவெளி	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் (f)	பெருக்கல் fx	ஊகச் சராசரி $(A=168)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx	படி விலக்கம் $d'x$ $\left(=\frac{dx}{2}\right)$	பெருக்கல் $fd'x$
155—157	154·5—157·5	156	4	624	—8	—4	—16
158—160	157·5—160·5	159	8	1272	—6	—3	—24
161—163	160·5—163·5	162	26	4212	—4	—2	—52
164—166	163·5—166·5	165	53	8745	—2	—1	—53
167—169	166·5—169·5	168	89	14952	0	0	0
170—172	169·5—172·5	171	62	10602	2	1	62
173—175	172·5—175·5	174	48	8352	4	2	96
176—178	175 5—178·5	177	14	2478	6	3	42
179—181	178·5—181·5	180	6	1080	8	4	24
			$n=310$	52317			$\Sigma fd'x = 79$

(i) நேரடி முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{52317}{310}$

$= 168{\cdot}76$

(ii) சுருக்க முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd\,x}{n} \times C$

$= 168 + \frac{79}{310} \times 3$

$= 168 + {\cdot}76$

$= 168{\cdot}76$

மாதிரி 18

509 வேலையாட்களின் வாரக் கூலியின் ரேண்டம் மாதிரியின் அலைவெண் பரவலைக் கீழ்க் காணும் பட்டியல் தருகிறது. வாரக் கூலியின் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்.

வாரக் கூலி	10—12	12—	14—	16—
வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	3	6	10	15
வாரக் கூலி	18—	20—	22—	24—
வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	24	42	75	70
வாரக் கூலி	26—	28—	30—	32—
வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	79	55	36	26
வாரக் கூலி	34—	36—	38—	40—42
வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	19	13	9	7

(ஐ. ஏ.எஸ்—1948)

தீர்வு :

வாரக் கூலியின் கூட்டுச் சராசரியைச் சுருக்கு முறையில் கணக்கிடல் :

வாரக் கூலி	மத்திய மதிப்பு (x)	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை (f)	ஊகச் சராசரி $(A=27)$ யிலிருந்து விலக்கம் (dx)	பெருக்கல் $(f\ dx)$
10—12	11	3	—16	— 48
12—14	13	6	—14	— 84
14—16	15	10	—12	—120
16—18	17	15	—10	—150
18—20	19	24	— 8	—192
20—22	21	42	— 6	—252
22—24	23	75	— 4	—300
24—26	25	90	— 2	—180
26—28	27	79	0	0
28—30	29	55	2	110
30—32	31	36	4	144
32—34	33	26	6	156
34—36	35	19	8	152
36—38	37	13	10	130
38—40	39	9	12	108
40—42	41	7	14	98
		$n=509$		$\Sigma f\ dx = —428$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$= 27 + \frac{-428}{509}$

$= 27 - 0{\cdot}84$

$= 26{\cdot}16$

ஆகவே வாரக் கூலியின் கூட்டுச் சராசரி = **26·16**

(தோராயமாக)

மாதிரி 19

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்.

பிரிவு (x)	அலைவெண் (f)
10—10·9	2
11—11·9	9
12—12·9	27
13—13·9	79
14—14·9	85
15—15·9	44
16—16 9	26
17—17·9	18
18—18 9	5

(பி.எஸ்ஸி.—சென்னை 1969)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

பிரிவு (x)	மூடிய பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் f	ஊகச் சராசரி $(A = 14.45)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx	பெருக்கல் (fdx)
10—10·9	9·95—10·95	10·45	2	— 4	— 8
11—11·9	10·95—11·95	11·45	9	— 3	—27
12—12·9	11·95—12·95	12·45	27	— 2	—54
13—13 9	12·95—13·95	13·45	79	— 1	—79
14—14·9	13·95— 4·95	14·45	85	0	0
15—15·9	14·95—15·95	15·45	44	1	44
16—16·9	15·95—16·95	16·45	26	2	52
17—17·9	16·95—17·95	17·45	18	3	54
18—18·9	17·95—18·95	18·45	5	4	20
			295		— 2

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$$= 14.45 + \frac{-2}{295}$$

$$= \mathbf{14.44322}$$

மாதிரி 20

கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்.

மதிப்பெண்கள்	1—5	6—10	11—15	16—20	21—25
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	7	10	16	32	24

மதிப்பெண்கள்	26—30	31—35	36—40	41—45
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	18	10	5	1

(பி.காம்—சென்னை-1951)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

மதிப் பெண்கள்	மூடிய மதிப் பெண்கள்	மத்திய மதிப்பு (x)	மாண வர்கள் எண் ணிக்கை (f)	படி விலக்கம் $d'x$	பெருக் கல் $fd'x$
1— 5	0·5— 5·5	3	7	—4	—28
6—10	5·5—10·5	8	10	—3	—30
11—15	10·5—15·5	13	16	—2	—32
16—20	15·5—20·5	18	32	—1	—32
21—25	20·5—25·5	23	24	0	0
26—30	25·5—30·5	28	18	1	18
31—35	30·5—35·5	33	10	2	20
36—40	35·5—40·5	38	5	3	15
41—45	40 5—45·5	43	1	4	4
			$n=123$		$\Sigma fd'x = -65$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$

$$= 23 + \frac{-65}{123} \times 5$$

$$= 23 + \frac{-325}{123}$$

$$= 23 - 2{\cdot}6$$

$$= 20{\cdot}4$$

ஆகவே, கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 20{\cdot}4$

மாதிரி 21

கீழ்க் காணும் பட்டியல் ஒரு நாட்டில் ஓரிடத்தில் குழந்தைகள் நடக்கத் துவங்கும் வயதினைத் தருகிறது. இப் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

வயது மாதங்களில்	8—8·9	9—9·9	10—10·9	11—11·9	12—12·9
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	1	9	20	29	60
வயது மாதங்களில்	13—13·9	14—14·9	15—15·9	16—16·9	17—17·9
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	32	30	14	8	1

இப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி காண். (சென்னை-பல்கலை)

தீர்வு : கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

வயது மாதங்களில்	வயது மாதங்களில்	மத்திய மதிப்பு (x)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை (f)	விலக்கம் dx $(=x-12{\cdot}45)$	பெருக்கல் fdx
8— 8·9	7·95— 8·95	8·45	1	—4	— 4
9— 9·9	8·95— 9·95	9·45	9	—3	—27
10—10·9	9·95—10·95	10·45	20	—2	—40
11—11·9	10·95—11·95	11·45	29	—1	—29
12—12·9	11·95—12·95	12·45	60	0	0
13—13·9	12·95—13·95	13·45	32	1	32
14—14·9	13·95—14·95	14·45	30	2	60
15—15·9	14·95—15·95	15·45	14	3	42
16—16·9	15·95—16·95	16·45	8	4	32
17—17·9	16·95—17·95	17·45	1	5	5
			$n = 204$		$\Sigma fdx = 71$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$$= 12.45 + \frac{71}{204}$$

$$= 12.45 + 0.348$$

$$= 12.798$$

மாதிரி 22

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்.

வருவாய் (மணிக்கு-சென்டுகளில்)		வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை
27·5-க்கு மேல்	32·5-க்குக் கீழ்	120
32·5 ,, ,,	37·5 ,, ,,	152
37·5 ,, ,,	42·5 ,, ,,	170
42·5 ,, ,,	47·5 ,, ,,	214
47·5 ,, ,,	52·5 ,, ,,	410
52·5 ,, ,,	57·5 ,, ,,	429
57·5 ,, ,,	62·5 ,, ,,	568
62·5 ,, ,,	67·5 ,, ,,	650
67·5 ,, ,,	72·5 ,, ,,	795
72·5 ,, ,,	77·5 ,, ,,	915
77·5 ,, ,,	82·5 ,, ,,	745
82·5 ,, ,,	87·5 ,, ,,	530
87·5 ,, ,,	92·5 ,, ,,	259
92·5 ,, ,,	97·5 ,, ,,	152
97·5 ,, ,,	102·5 ,, ,,	107
102·5 ,, ,,	107·5 ,, ,,	50
107·5 ,, ,,	112·5 ,, ,,	25
மொத்தம்		6291

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

வருவாய் (ஒரு மணிக்கு சென்டுகளில்)	மத்திய மதிப்பு (x)	வேலை யாட்களின் எண்ணிக்கை (f)	ஊகச் சராசரி (A – 55) யிலிருந்து விலக்கம் dx	பெருக்கல் fdx
27·5 — 32·5	30	120	—5	—600
32·5 — 37·5	35	152	—4	— 608
37·5 — 42·5	40	170	—3	—510
42·5 — 47·5	45	214	—2	—428
47·5 — 52·5	50	410	– 1	—410
52·5 — 57·5	55	429	0	0
57·5 — 62·5	60	568	1	568
62·5 — 67·5	65	650	2	1300
67·5 — 72·5	70	795	3	2385
72·5 — 77·5	75	915	4	3660
77·5 — 82·5	80	745	5	3725
82·5 — 87·5	85	530	6	3180
87·5 — 92·5	90	259	7	1813
92·5 — 97·5	95	152	8	1216
97·5 — 102·5	100	107	9	963
102·5 — 107·5	105	50	10	500
107·5 — 112·5	110	25	11	275
		$n = 6291$		$\Sigma fdx = 17029$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$= 55 + \frac{17029}{6291} \times 5$

$= 55 + 13{\cdot}53$

$= 68{\cdot}53$ செண்டுகள் (தோராயமாக)

மாதிரி 23

கீழ்க் காணும் குவி அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக :

மதிப்பெண்கள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
0 அல்லது 0-க்கு மேல்	40
10 அல்லது 10-க்கு மேல்	36
20 அல்லது 20-க்கு மேல்	28
30 அல்லது 30-க்கு மேல்	15
40 அல்லது 40-க்கு மேல்	5

தீர்வு :

முதலில் சாதாரண அலைவெண் பரவலாக மாற்றுதல் :

குவி அலைவெண் பரவல்		சாதாரண அலைவெண் பரவல்	
மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மதிப்பெண்களின் பிரிவு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0 அல்லது 0-க்கும் மேல்	40	0—10	4
10 அல்லது 10-க்கும் மேல்	36	10—20	8
20 அல்லது 20-க்கும் மேல்	28	20—30	13
30 அல்லது 30-க்கும் மேல்	15	30—40	10
40 அல்லது 40-க்கும் மேல்	5	40—50	5

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

மதிப் பெண்கள்	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் f	ஊகச் சராசரி ($A=25$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	பெருக்கல் $f\,dx$
0 —10	5	4	—20	—80
10 —20	15	8	—10	—80
20 —30	25	13	0	0
30 —40	35	10	10	100
40 —50	45	5	20	100
		$n=40$		$\Sigma fdx=40$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$$= 25 + \frac{40}{40}$$

$$= 25 + 1$$

$= 26$ **மதிப்பெண்கள்**

மாதிரி 24

கீழ் வரும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண் :

வாரச் செலவு (ரூபாயில்)	மாணவர்கள்
5-க்குக் கீழ்	6
10-க்குக் கீழ்	16
15-க்குக் கீழ்	28
20-க்குக் கீழ்	38
25-க்குக் கீழ்	46

தீர்வு :

முதலில் சாதாரண அலைவெண் பரவலாக மாற்ற வேண்டும். பின்னர், முன்பு கணக்கிட்டபடி தேவையான கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடலாம்,

கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடல் :

வாரச் செலவுப் பிரிவு (ரூபாயில்)	அலைவெண் (f)	மத்திய மதிப்பு (x)	ஊகச் சராசரி ($A = 12{\cdot}5$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	பெருக்கல் fdx
0— 5	6	2·5	—10	— 60
5—10	16— 6 = 10	7·5	— 5	— 50
10—15	28—16 = 12	12·5	0	0
15—20	38—28 = 10	17·5	5	50
20—25	46—38 = 8	22·5	10	80
	$n = 46$			$\Sigma fdx = 20$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$$= 12{\cdot}5 + \frac{20}{46}$$

$$= 12{\cdot}5 + 0{\cdot}43$$

$$= 12{\cdot}93$$

ஆகவே, வாரச் செலவின் கூட்டுச் சராசரி = ரூ. **12·93**
(தோராயமாக)

மாதிரி 25

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

வருமானம்	எண்ணிக்கை
ரூ. 20-க்கு மேல் 30-க்குக் கீழ்	69
ரூ. 30-க்கு மேல் 40-க்குக் கீழ்	167
ரூ. 40-க்கு மேல் 50-க்குக் கீழ்	207
ரூ 50-க்கு மேல் 60-க்குக் கீழ்	65
ரூ 60-க்கு மேல் 70-க்குக் கீழ்	58
ரூ. 70-க்கு மேல் 80-க்குக் கீழ்	27
ரூ. 80-ம் அதற்கு மேலும்	7
மொத்தம்	600

(பி. காம்-சென்னை-1952)

தீர்வு : கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

வருமானம் (ரூபாயில்)	மத்திய மதிப்பு (x)	அலைவெண் (f)	ஊகச் சராசரி ($A=55$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	படி விலக்கம் $d'x$ $\left(=\frac{dx}{10}\right)$	பெருக்கல் $fd'x$
20—30	25	69	—30	—3	—207
30—40	35	167	—20	—2	—334
40—50	45	207	—10	—1	—207
5)-60	55	65	0	0	0
60—70	65	58	10	1	58
70—80	75	27	20	2	54
80-க்கு மேல்	85	7	3)	3	21
		$n=600$			$\Sigma fd'x = -615$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$$

$$= 55 + \frac{-615}{600} \times 10$$

$$= 55 - 10{\cdot}25$$

$$= \mathbf{44{\cdot}75} \text{ ரூபாய்கள்}$$

மாதிரி 26

கீழ்க் காணும் பட்டியலின்படி, மாணவர்கள் எடுத்த கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்களைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை
0-க்கு மேல்	80	60-க்கு மேல்	28
10 ,, ,,	77	70 ,, ,,	16
20 ,, ,,	72	80 ,, ,,	10
30 ,, ,,	65	90 ,, ,,	8
40 ,, ,,	55	100 ,, ,,	0
50 ,, ,,	43		

தீர்வு :

முதலில் 0–10 ; 10–20 ; 20–30 ;......என இருக்கும்படி மதிப்பெண்களைப் பிரிவுபடுத்திக் கொள்ளவேண்டும். 0-க்கு மேல் மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை 80. ஆனால் 10-க்கு மேல் மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை 77. ஆகவே, 0—10 என்ற பிரிவிற்குள் மதிப்பெண்கள் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 80—77 3 என்பதாகும். இதுபோல், 10—20 மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் எண்ணிக்கை 77—72=5 என்பதாகும். இதுபோல, சாதாரண அலைவெண் பரவல் கணக்கிட்டு, கூட்டுச் சராசரி காணவேண்டும்.

மதிப்பெண்கள்	அலைவெண் (f)	மத்திய மதிப்பு	ஊகச் சராசரி $(A=55)$ லிருந்து விலக்கம் dx	படி விலக்கம் $d'x$ $\left(=\frac{dx}{10}\right)$	பெருக்கல் $fd'x$
0 — 10	80 — 77 = 3	5	— 50	— 5	— 15
10 — 20	77 — 72 = 5	15	— 40	— 4	— 20
20 — 30	72 — 65 = 7	25	— 30	— 3	— 21
30 — 40	65 — 55 = 10	35	— 20	— 2	— 20
40 — 50	55 — 43 = 12	45	— 10	— 1	— 12
50 — 60	43 — 28 = 15	55	0	0	0
60 — 70	28 — 16 = 12	65	10	1	12
70 — 80	16 — 10 = 6	75	20	2	12
80 — 90	10 — 8 = 2	85	30	3	6
90 — 100	8 — 0 = 8	95	40	4	32
	$N = 80$				$\Sigma fd'x = -26$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d' x}{n} \times C$

$= 55 + \frac{-26}{80} \times 10$

$= 55 - 3{\cdot}25$

$= 51{\cdot}75$ மதிப்பெண்கள்

ஆகவே, மாணவர்கள் எடுக்கும் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்கள் $\}$ = 51·75 மதிப்பெண்கள்

மாதிரி 27

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு விடுபட்ட எண்ணைக் கண்டுபிடி.

மதிப் பெண்கள்	5	6	7	8	12	—	15	17	17	18
மாண வர்கள்	3	10	5	10	12	15	11	8	5	1

கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் = 11·6625

தீர்வு :

மதிப்பெண்கள் (m)	மாணவர்கள் (f)	mf
5	3	15
6	10	60
7	5	35
8	10	80
12	12	144
—	15	—
15	11	165
17	8	136
17	5	85
18	1	18
மொத்தம்	80	738

80 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்கள் = 11·6625

∴ 80 மாணவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்கள் = 11·6625 × 80

= 933

(80—15) மாணவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்கள் = 738

∴ 15 மாணவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்கள் = 933—738

= 195

∴ **1 மாணவனின் மொத்த மதிப்பெண்** = **195/15 = 13**

விடுபட்ட மதிப்பெண் = 13 மதிப்பெண்கள்

மாதிரி 28

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலில் ஐந்தாவது அலைவெண் தெரியவில்லை. கூட்டுச் சராசரி 106 எனத் தெரிகிறது. தெரியாத அலைவெண்ணைக் கணக்கிடுக.

ரூபாய்	அலைவெண்	ரூபாய்	அலைவெண்
50—60	1	100—110	115
60—70	6	110—120	75
70—80	20	120—130	52
80—90	41	130—140	21
90—100	?	140—150	15

(கர்னாடகா பல்கலை)

தீர்வு :

தெரியாத அலைவெண்ணைக் கண்டு பிடித்தல் :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் f	fx
50— 60	55	1	55
60— 70	65	6	390
70— 80	75	20	1500
80— 90	85	41	3485
90—100	95	X	$95X$
100—110	105	155	16275
110—120	115	75	8625
120—130	125	52	6500
130—140	135	21	2835
140—150	145	15	2175
மொத்தம்		$386+X$	$41840+95X$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

இங்கு,

$\bar{x} = 160; \quad \Sigma f = 386+X;$

$\Sigma fx = 41840+95X$

X-ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு அறியவேண்டும்.

ஆகவே, $106 = \dfrac{41840+95X}{386+X}$

அல்லது, $106 \times (386+X) = 41840+95X$

அல்லது, $106X - 95X = 41840-40916$

அல்லது, $11X = 924$

$$X = \frac{924}{11}$$

$$= 84$$

ஆகவே, தெரியாத அலைவெண்ணின் மதிப்பு

$$X = 84$$

மாதிரி 29

ஒரு தொழிற்சாலையில் தினக் கூலியாக 30 தொழிலாளர்கள் வாங்கிய கூலி விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. 20 புதிய காசுகளை இடை வெளியாகக் கொண்ட பிரிவுகளைக் கொண்டே ஓர் அலை வெண் பரவலை உண்டாக்கு. பின்பு ஒரு தொழிலாளிக்குக் கொடுக்கும் கூட்டுச் சராசரி தினக் கூலியைக் கணக்கிடுக. தினக் கூலி புதிய காசுகளில் தரப்பட்டுள்ளது.

140, 160, 160, 140, 220, 130, 150, 240, 120, 230,
140, 200, 170, 210, 180, 180, 190, 200, 170, 160,
160, 110, 120, 210, 200, 170, 180, 190, 220, 230,

தீர்வு ;

வருவாய்ப் பிரிவு	அலைவெண் குறிகள்	அலைவெண்
110—130	𝍷𝍷𝍷	3
130—150	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
150—170	𝍸	5
170—190	𝍸 𝍷	6
190—210	𝍸	5
210—230	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
230—250	𝍷𝍷𝍷	3
	மொத்தம்	30

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

கூலி (புதிய காசுகளில்)	கூலி யாட்கள் எண்ணிக்கை (f)	மத்திய மதிப்பு (x)	பெருக்கல் (fx)	ஊகச் சராசரி $(A=180)$ யிலிருந்து விலக்கம் (dx)	பெருக்கல் (fdx)
110—130	3	120	360	—60	—180
130—150	4	140	560	—40	—160
150—170	5	160	800	—20	—100
170—190	6	180	1080	0	0
190—210	5	200	1000	20	100
210—230	4	220	880	40	160
230—250	3	240	720	60	180
	$n=30$		$\Sigma fx = 5400$		$\Sigma fdx = 0$

(i) நேரடி முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{5400}{30}$

$=$ 180 புதிய காசுகள்

(ii) சுருக்கு முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$= 180+0$

$=$ 1 1 (புதிய காசுகள்

ஆகவே, தினக் கூலியின் கூட்டுச் சராசரி = ரூ. 1·80 காசுகள்

மாதிரி 30

ஒரு வகுப்பில் 'அ' பிரிவிலுள்ள 25 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரம் 61 அங்குலங்கள். அதே வகுப்பில் 'ஆ' பிரிவிலுள்ள

35 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரம் 58 அங்குலங்களாகும். ஒன்று சேர்க்கப்பட்ட அவ் வகுப்பின் 60 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரத்தைக் காண்.

தீர்வு :

அ, ஆ பிரிவுகளை ஒன்று சேர்த்தபின் ஒரே வகுப்பு மாணவர்களின் உயரத்தின் கூட்டுச் சராசரி காணல் :

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \overline{x} = \frac{n_1\overline{x_1}+n_2\overline{x_2}}{n_1+n_2}$$

இங்கு, $\overline{x}$ = ஒன்று சேர்க்கப்பட்ட வகுப்பு மாணவர்களின் சராசரி உயரம்

$\overline{x_1}$ = 'அ' பிரிவு மாணவர்களின் உயரம்

$\overline{x_2}$ = 'ஆ' பிரிவு மாணவர்களின் சராசரி உயரம்

n_1 = 'அ' பிரிவில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

n_2 = 'ஆ' பிரிவில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

இக் கணக்கில்,

$n_1 = 25;\quad n_2 = 35;$

$\overline{x_1} = 61;\quad \overline{x_2} = 58.$

ஆகவே, ஒன்று சேர்த்தபின் மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரம் $\overline{x} = \dfrac{(25\times 61)+(35\times 58)}{25+35}$

$= \dfrac{3555}{70}$

$= 59{\cdot}25$

ஒன்று சேர்த்தபின் 60 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி உயரம் = 59·25 அங்குலங்கள்

மாதிரி 31

200 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 47. வேறு 300 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 52. அந்த 500 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

இங்கு, $n_1 = 200,\quad n_2 = 300$

$\overline{x_1} = 47,\quad \overline{x_2} = 52$

ஆகவே,

மொத்த மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி காணும் சூத்திரம் $\bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{(200 \times 47) + (300 \times 52)}{200 + 300}$$

$$= \frac{9400 + 15600}{500}$$

$$= \frac{25000}{500}$$

$$= \mathbf{50}$$

ஆகவே,

மொத்த மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் = **50 ஆகும்.**

மாதிரி 32

60 பேர் கொண்ட காலைப் பிரிவும், 40 பேர் கொண்ட மாலைப் பிரிவும் உடைய ஒரு தொழிற்சாலையின் மொத்த 100 பேர்களின் கூட்டுச் சராசரிக் கூலி ரூ. 38 ஆகும் காலைப் பிரிவில் வேலை செய்யும் 60 தொழிலாளர்களின் கூட்டுச் சராசரிக் கூலி ரூ 40 என்றால், மாலைப் பிரிவில் வேலை செய்யும் 40 தொழிலாளர்களின் கூட்டுச் சராசரிக் கூலி என்ன ?

தீர்வு :

இங்கு $n_1 = 60$; $n_2 = 40$; $\bar{x}_1 = 40$; $\bar{x} = 38$; $\bar{x}_2$ = ?

கூட்டுச் சராசரி சூத்திரம் $= \bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

ஆகவே, $38 = \dfrac{(60 \times 40) + (40 \times \bar{x}_2)}{60 + 40}$

அல்லது $100 \times 38 = (60 \times 40) + (40 \times \bar{x}_2)$

$$40\bar{x}_2 = 3800 - 2400$$

$$= 1400$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1400}{40}$$

$$= \mathbf{35.}$$

ஆகவே, மாலைப் பிரிவில் வேலை செய்யும் 40 தொழிலாளர்களின் கூட்டுச் சராசரிக் கூலி = ரூ 35 ஆகும்.

மாதிரி 33

ஒரு குறிப்பிட்ட தொற்று நோயால் பாதிக்கப்பட்ட நோயாளியின் இரத்த பாக்டீரியாக் கிருமிகள் எண்ணிக்கை 4 நாள்களில் 2000-லிருந்து 16000 ஆகக் கூடியது. சராசரிச் சதவீதக் கூடுதலைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

சராசரிச் சதவீத உயர்வை 'x' எனக் கொள்க.

முதல் நாளின்(ஆரம்ப நாளில்) கிருமிகளின் எண்ணிக்கை $= 2000$

இந்நாளில் உயர்வு $= 2000\,x$ (வசதிக்காக இங்கு 100 ஆல் வகுக்கப்படவில்லை)

முதல் நாள் முடிவில் மொத்த எண்ணிக்கை $= 2000 \times 2000x$

$= 2000\,(1+x)$

இரண்டாவது நாள் முடிவில் மொத்த எண்ணிக்கை $= 2000\,(1+x) + 2000\,(1+x) \times x$

$= 2000\,(1+x)^2$

மூன்றாவது நாள் முடிவில் மொத்த எண்ணிக்கை $= 2000\,(1+x)^3$

நான்காவது நாள் முடிவில் மொத்த எண்ணிக்கை $= 2000\,(1+x)^4$

ஆகவே, $2000\,(1+x)^4 = 16000$ அல்லது

$$(1+x)^4 = 8$$

$$\therefore\ (1+x) = \sqrt[4]{8}$$

$$= \frac{(\log 8)}{4}$$ — ன் எதிர் மடக்கை

$$= 1{\cdot}682$$

ஆகவே $x = 1{\cdot}682 - 1$

$= 0{\cdot}682$

$\therefore$ சராசரிச் சதவீத உயர்வு $= 68{\cdot}2\%$ / நாளுக்கு.

இரண்டாவது முறை :

கீழ்க் காணும் சூத்திரம் மூலம் மேற்கண்ட கணக்கைக் கணக்கிடலாம்.

$$r = \sqrt[n]{\frac{p_n}{p_o}} - 1$$

இங்கு r = வீதம்

N = நாள்கள் எண்ணிக்கை

p_o = ஆரம்பகால எண்ணிக்கை

p_n = கடைசி நாளில் எண்ணிக்கை

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைப் பிரதியிட்ட பின்பு

$$r = \left[\frac{16000}{2000}\right]^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$= \sqrt[4]{8} - 1$$

$$= 1{\cdot}682 - 1$$

$$= 0{\cdot}682$$

$\therefore$ சராசரிச் சதவீத உயர்வு $= 68{\cdot}2\%$ /நாளுக்கு.

மாதிரி 34

கூட்டுச் சராசரி மதிப்பு 52 எனவும், பெருக்குச் சராசரி 46 எனவும் இருக்கும் இரண்டு எண்களின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு :

x, y என்பவை காணவேண்டிய இரு எண்களாக இருக்கட்டும்.

ஆகவே,

$$\frac{x+y}{2} = 52$$

$$x+y = 104$$

மேலும் $\sqrt{x \times y} = 46$

அல்லது $x \times y = 2116$

மேலும் $(x+y)^2 = (104)^2$

அல்லது $x^2+y^2+2xy = 10816$

மேலும் $x^2+y^2+2xy-4xy = 10816-4(2116)$

$$x^2-2xy+y^2 = 10816-8464 = 2352$$

$$(x-y)^2 = 2352$$

$$(x-y) = \sqrt{2352}$$

$$x-y = 48{\cdot}5$$

$$x+y = 104{\cdot}0$$

அல்லது $2x = 152{\cdot}5$

ஆகவே, $x = 76{\cdot}25$

$$y = 27{\cdot}75$$

மாதிரி 35

ஒரு நிறுவனத்தின் 30 வேலையாட்களின் மாதச் சம்பளத்தைக் (ரூபாயில்) கீழ் வரும் பட்டியல் தருகிறது :

139, 126, 114, 100, 88, 62, 77, 99, 103, 104,
144, 148, 63, 69, 148, 132, 118, 142, 116, 123,
95, 80, 85, 106, 123, 133, 140, 134, 108, 129.

ரூபாய்கள் 10, 15, 20, 25, 30, 35 என்று இலாப இனமாக (Bonus) வேலையாட்களுக்குக் கீழ்க் கண்ட முறைப்படி தரப்படுகிறது :

ரூ. 60-க்கு மேல் ரூ. 75-க்குக் கீழ்

ரூ. 75-க்கு மேல் ரூ. 90-க்குக் கீழ்

....

ரூ. 135-க்கு மேல் ரூ. 150-க்குக் கீழ்

அந் நிறுவனம் வேலையாட்களுக்குக் கொடுத்த இலாப இனமின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

(பி.காம்.காசி பல்கலை)

தீர்வு :

முதலில் மேலே தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குச் சம்பளப் பிரிவுப்படி வேலையாட்களைப் பிரிக்க வேண்டும்.

விவரம்	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	கொடுக்கப்பட்ட இலாப இனம் (ரூபாயில்)
ரூ. 60-க்கு மேல் ஆனால் ரூ.75-க்கு கீழ்	3	10
ரூ. 75 ,, ,, ,, ரூ. 90 ,, ,,	4	15
ரூ. 90 ,, ,, ,, ரூ. 105 ,, ,,	5	20
ரூ. 105 ,, ,, ,, ரூ. 120 ,, ,,	5	25
ரூ. 120 ,, ,, ,, ரூ. 135 ,, ,,	7	30
ரூ. 135 ,, ,, ,, ரூ. 150 ,, ,,	6	35
மொத்தம்	30	

கொடுக்கப்பட்ட இலாப இனமுக்குக் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

கொடுக்கப்பட்ட இலாப இனம் (x)	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை (f)	பெருக்கல் fx
10	3	30
15	4	60
20	5	100
25	5	125
30	7	210
35	6	210
மொத்தம்	$n = 30$	$\Sigma fx = 735$

கூட்டுச் சராசரி காணும் சூத்திரம் $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$= \frac{735}{30}$

ரூ. 24·5

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட இலாப இனுமின் கூட்டுச் சராசரி } = ரூ. 24·5

மாதிரி 36

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட்டு, சார்லியர் சோதனை மூலம் சரி பார்.

பிரிவு இடைவெளி	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30
அலைவெண்	3	4	8	10	7	5

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

பிரிவு இடைவெளி	மத்திய மதிப்பு (x)	அலை வெண் (f)	ஊகச் சராசரி $(A=12{\cdot}5)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx	$(dx+1)$	பெருக்கல் fdx	பெருக்கல் $f(dx+1)$
0— 5	2·5	3	— 10	—9	—30	—27
5—10	7·5	4	— 5	—4	—20	—16
10—15	12·5	8	0	1	0	8
15—20	17·5	10	5	6	50	60
20—25	22·5	7	10	11	70	77
25—30	27·5	5	15	16	75	80
		$\Sigma f = 37$			$\Sigma fdx = 145$	$\Sigma f(dx+1) = 182$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி காணும் சூத்திரம்} = A + \frac{\Sigma f dx}{n}$$

$$= 12{\cdot}5 + \frac{145}{37}$$

$$= 12{\cdot}5 + 3{\cdot}91$$

$$= 16{\cdot}41$$

சார்லியர் சோதனை :

$$f(dx+1) = f\,dx + f$$

$$\Sigma f(dx+1) = \Sigma f\,dx + \Sigma f$$

$$\Sigma [f(dx+1)] - \Sigma fd = \Sigma f$$ (இங்கு $\Sigma f = n$ = மொத்த அலைவெண்)

இங்கு, $\Sigma [f(dx+1)] = 182$

$\Sigma (f\,dx) = 145$

$\Sigma (f) = 37$

ஆதலால், $182 - 147 = 37$ (மொத்த அலைவெண்கள்). எனவே, சார்லியர் சோதனை மூலம் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிட்ட முறை சரி எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 37

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டல் முறையில் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளிகள்	அலைவெண்	பிரிவு இடைவெளிகள்	அலைவெண்
20—21	8	25—26	25
21—22	10	26—27	16
22—23	11	27—28	9
23—24	16	28—29	6
24—25	20	மொத்தம்	121

தீர்வு :

கூட்டல் முறையில் (Summation Method) கூட்டுச் சாரசரி கணக்கிடல் :

பிரிவு இடைவெளி	அலை வெண்	குவி அலை வெண்
20—21	8	8
21—22	10	18
22—23	11	29
23—24	16	45
24—25	20	65
25—26	25	90
26—27	16	106
27—28	9	115
28—29	6	121
மொத்தம்	121	597

கூட்டல் முறையில் கூட்டுச் சராசரி

காணும் சூத்திரம் $\bar{x} = M - C\,(F_1 - 1)$

இங்கு M = கடைசி இடைவெளிப் பிரிவின் மத்திய மதிப்பு

C = இடைவெளித் தூரம்

f_1 = குவி அலைவெண்களின் கூட்டலை, அலை வெண் கூடுதலால் வகுத்துக் கிடைக்கும் மதிப்பு.

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = M - C\,(F_1 - 1)$

$$= 28{\cdot}5 - 1\left(\frac{597}{121} - 1\right)$$

$$= 28{\cdot}5 - (4{\cdot}9 - 1)$$

$$= 28{\cdot}5 - 3{\cdot}9$$

$$= 24{\cdot}6$$

மாதிரி 38

கீழ்க் கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு, (i) சுருக்க முறையில் (ii) கூட்டல் முறையில் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	அலைவெண்	மதிப்பெண்கள்	அலைவெண்
10—25	6	55—70	26
25—40	20	70—85	3
40—55	44	85—100	1

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

மதிப் பெண்கள்	மத்திய மதிப்பு (x)	அலை வெண் (f)	குவி அலை வெண் $(c.f)$	ஊகச் சராசரி $(A=47{\cdot}5)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx	பெருக் கல் $f\ dx$
10— 25	17·5	6	6	—30	—180
25— 40	32·5	20	26	—15	—300
40— 55	47·5	44	70	0	0
55— 70	62 5	26	96	15	390
70— 85	77·5	3	99	30	90
85—100	92·5	1	100	45	45
		$n=100$	397		$\Sigma fdx = 45$

சுருக்க முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f\ dx}{n}$

$= 47{\cdot}5 + \frac{45}{100}$

$= 47{\cdot}5 + 0{\cdot}45$

$= 47{\cdot}95$ மதிப்பெண்கள் (தோராயமாக)

கூட்டல் முறை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = M - C(F_1 - 1)$

$$= 92.5 - 15\left(\frac{397}{100} - 1\right)$$

$$= 92.5 - 15(3.97 - 1)$$

$$= 92.5 - (15 \times 2.97)$$

$$= 92.5 - 44.55$$

$= 47.95$ மதிப்பெண்கள் (தோராயமாக)

மாதிரி 39

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி அம்சங்களின் விலக்கக் கூடுதல் பூச்சியமாகும் எனக் காட்டு.

தீர்வு :

(A) தனித்த தொகுதி :

இங்கு, $\Sigma(x_i - \bar{x}) = 0$ எனக் காட்டவேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி சூத்திரம் $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$ ஆகும்.

ஆகவே, $\Sigma(x_i - \bar{x}) = \Sigma x_i - \Sigma \bar{x}$

$$= \Sigma x_i - n\, x$$

$$= \Sigma x_i - n \times \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$= \Sigma x_i - \Sigma x_i$$

$$= 0$$

(B) தொடர் தொகுதி : அலைவெண் பரவலுக்கு :

கூட்டுச் சராசரி சூத்திரம் $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$

இங்கு, $\Sigma f_i(x_i - \bar{x}) = 0$ எனக் காட்டவேண்டும்,

$$\text{ஆகவே, } \Sigma f_i (x_i - \overline{x}) = \Sigma f_i x_i - \Sigma f_i \overline{x}$$
$$= \Sigma f_i x_i - N\overline{x} \quad (\because \Sigma f_i = N)$$
$$= \Sigma f_i x_i - N \frac{\Sigma f_i x_i}{N}$$
$$= \Sigma f_i x_i - \Sigma f_i x_i$$
$$= 0$$

ஆகவே, கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட தனி அம்சங்களின் விலக்கக் கூடுதல் பூச்சியமாகும் என நிரூபிக்கப்பட்டு விட்டது.

மாதிரி 40

u, v என்ற இரு மாறிகளில், ஒவ்வொரு i-க்கும் u_i என்பதற்கு ஈடானது v_i என்பதாகும். ஒரு புதிய மாறி $Z = au + bv$ என்பது கண்டால், $\overline{Z} = a\,\overline{u} + b\,\overline{v}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

ஒவ்வொரு u, v மாறிகள் n என்ற எண்ணிக்கையில் இருக்கட்டும்.

இங்கு $Z_i = au_i + bv_i$ என்பதாகும்.

$$\text{ஆகவே, } \sum_{r=1}^{n} Z_i = a \sum_{r=1}^{n} u_i + b \sum_{r=1}^{n} v_i$$

இரண்டு பக்கங்களையும் n ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{\sum\limits_{r=1}^{n} Z_i}{n} = \frac{a \sum\limits_{r=1}^{n} u_i}{n} + \frac{b \sum\limits_{r=1}^{n} v_i}{n}$$

அதாவது $\overline{Z} = a\,\overline{u} + b\,\overline{v}$

எனவே, $Z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots\ldots + a_m u_m$ என இருந்தால்,

$$\bar{Z} = a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + a_3 \bar{u}_3 + \ldots\ldots + a_m \bar{u}_m$$ என

அடைகிறோம்.

எனவே கேட்டது நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டது.

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி
(Weighted Arithmetic Mean)

மாதிரி 41

கீழ்க் கண்ட பட்டியலிலுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு,

(i) நிறையிடாத கூட்டுச் சராசரியை 3 ஆம் பத்தியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விலைகளுக்குக் காண்.

(ii) பயன்படுத்தப்பட்ட பொருள்களின் அளவைக் கொண்டு நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் காண்.

இரண்டு சராசரி விலைகளும் வித்தியாசமாக இருக்கக் காரணம் என்ன ?

(1) உணவுப் பொருள்களின் பெயர்கள்	(2) பயன் படுத்தப்பட்ட உணவு அளவுகள்	(3) விலை (ரூபாயில் - மணங்கிற்கு)
மாவு	11·5 மணங்கு	5·8
நெய்	5·6 ,,	58·4
சர்க்கரை	0·28 ,,	8·2
உருளைக்கிழங்கு	0 16 ,,	2·5
எண்ணெய்	0·35 ,,	20·0

(எம். ஏ. — கல்கத்தா - 1947)

தீர்வு :

சாதாரண, நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரிகளைக் கணக்கிடல் :

உணவுப் பொருள்களின் பெயர்கள்	பயன்படுத்தப் பட்ட உணவு அளவுகள் (மணங்கில்) (w)	விலை (ரூபாயில் —மணங்கிற்கு) (x)	பெருக்கல் (xw)
மாவு	11·5	5·8	66·7
நெய்	5·6	58·4	327·04
சர்க்கரை	0 28	8·2	2·296
உருளைக்கிழங்கு	0·16	2·5	0·4
எண்ணெய்	0·35	20·0	7·0
$n = 5$	$\Sigma w = 17{\cdot}89$	$\Sigma x = 94{\cdot}9$	$\Sigma xw = 403{\cdot}436$

சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$$= \frac{94{\cdot}9}{5}$$

$$= \text{ரூ } 18{\cdot}98$$

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma\, xw}{\Sigma\, w}$

$$= \frac{403{\cdot}436}{17{\cdot}89}$$

$$= \text{ரூ. } 22{\cdot}55$$

இங்கு, சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடும்பொழுது, எல்லாப் பொருள்களுக்கும் சமமான முக்கியத்துவம் கொடுத்துக் கணக்கிடப்பட்டது. ஆனால், நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடும் பொழுது, எடைகள் அப்பொருள்களின் சார்பு முக்கியத்துவத்திற்குத் தகுந்தாற்போல் கொடுக்கப்பட்டு, சராசரி கணக்கிடப் பட்டுள்ளது. இதன் காரணமாகவே இரண்டு சராசரி விலைகளும் வித்தியாசப்படுவதைக் காணலாம்.

மாதிரி 42

எடைகளும், அந்த எண்களுக்குச் சமமாக இருக்கும், முதல் n இயற்கை எண்களின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடு.

தீர்வு :

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி காணல் :

$$\bar{x} = \frac{1.1+2.2+3.3+\dots\dots\dots+n.n}{1+2+3+\dots\dots\dots+n}$$

$$= \frac{\Sigma n^2}{\Sigma n}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Big/ \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n+1}{3}$$

மாதிரி 43

ஒரு மாணவன் ஒரு தேர்வில் கீழ்க்கண்ட சதவீத மதிப்பெண் களைப் பெறுகிறான் :

ஆங்கிலம் —75 புள்ளியியல் —60 கணக்கு —59
பௌதிகம் —55 இரசாயனம் —63

எடைகள் 2, 1, 3, 3, 1 என்று பாடங்களுக்கு முறையே கொடுத்து, நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக. சாதாரண கூட்டுச் சராசரியையும் காண்.

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி, நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி காணல் :

பாடம்	சதவீத மதிப் பெண்கள் (x)	எடை (w)	பெருக்கல் (xw)
ஆங்கிலம்	75	2	150
புள்ளியியல்	60	1	60
கணக்கு	59	3	177
பௌதிகம்	55	3	165
இரசாயனம்	63	1	63
மொத்தம்	312	10	615

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w}$

$= \frac{615}{10}$

$= 61{\cdot}5$ மதிப்பெண்கள்

சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{312}{5}$

$= 62{\cdot}4$ மதிப்பெண்கள்

மாதிரி 44

கீழ்வரும் விவரங்களுக்கு நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் காண்.

பண்டம்	நுகர் அளவு (கிலோவில்)	1 கிலோ விலை (ரூபாயில்)
A	11·50	5·80
B	5·60	58·40
C	0·25	8·20
D	0.15	2·50
E	0·35	20·00

தீர்வு :-

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

பண்டம்	நுகர் அளவு (கிலோவில்) (w)	1 கிலோ விலை (ரூபாயில்) (x)	பெருக்கல் (xw)
A	11·50	5·80	66·70
B	5·60	58·40	327·04
C	0·25	8·20	2·05
D	0·15	2·50	0·375
E	0·35	20·00	7·00
	17·85		403·165

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma xw}{\Sigma w}$

$$= \frac{403 \cdot 165}{17 \cdot 85}$$

$$= \mathbf{22 \cdot 58}$$

மாதிரி 45

கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்கு

(1) சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி (2) நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி ஆகிய இரண்டையும் கணக்கிடுக.

வரிசை எண்	பதவி	மாதச் சம்பளம் (x)	தகுதியின் பலம் (w)
1	பதிவு பெற்ற அலுவலர்கள்	1500	10
2	பதிவு பெறாத அலுவலர்கள்	800	20
3	முதல் வகுப்பு எழுத்தர்கள்	500	70
4	இரண்டாம் வகுப்பு எழுத்தர்கள்	250	100
5	கடைநிலை ஊழியர்கள்	100	150

தீர்வு :

சாதாரண நிறையிட்ட சராசரிகளைக் கணக்கிடல் :

வரிசை எண்	பதவி	மாதச் சம்பளம் (x)	தகுதியின் பலம் (w)	பெருக்சல் (xw)
1	பதிவு பெற்ற அலுவலர்கள்	1500	0	15000
2	பதிவு பெறாத அலுவலர்கள்	800	20	16000
3	முதல் வகுப்பு எழுத்தர்கள்	500	70	35000
4	இரண்டாம் வகுப்பு எழுத்தர்கள்	250	100	25000
5	கடைநிலை ஊழியர்கள்	100	150	15000
$n = 5$	மொத்தம்	$\Sigma x = 3150$	$\Sigma w = 350$	$\Sigma xw = 106000$

(i) சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$$= \frac{3150}{5}$$

$$= \text{ரூ. } 630$$

(ii) நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w}$

$$= \frac{106000}{350}$$

$$= \text{ரூ. } 303$$ (தோராயமாக)

மாதிரி 46

கீழ்க் காணும் பட்டியலைக் கொண்டு,

(i) சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி

(ii) நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி

ஆகியவற்றை 'அ' 'ஆ' ஆகிய இரண்டு நகரங்களிலுள்ள ஆசிரியர்களின் சம்பளத்திற்குக் கணக்கிடுக.

பள்ளிக்கூடங்கள்	'அ' நகர்		'ஆ' நகர்	
	ஆசிரியர் எண்ணிக்கை	சம்பள விதம்	ஆசிரியர் எண்ணிக்கை	சம்பள விதம்
நகராட்சிப் பள்ளிகள்	23	30	25	40
அரசினர் பள்ளிகள்	30	35	30	50
உதவி பெறும் பள்ளிகள்	20	28	15	30
உதவி பெறுத பள்ளிகள்	15	25	10	25
இரவுப் பள்ளிகள்	12	30	10	30

தீர்வு : கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

பள்ளிக் கூடங்கள்	'அ' நகர்			'ஆ' நகர்		
	ஆசிரியர் எண்ணிக்கை (w)	சம்பள விதம் (x)	பெருக்கல் (xw)	ஆசிரியர் எண்ணிக்கை (w)	சம்பள விதம் (x)	பெருக்கல் (xw)
நகராட்சிப் பள்ளிகள்	23	30	690	25	40	1000
அரசினர் பள்ளிகள்	30	35	1050	30	50	1500
உதவி பெறும் பள்ளிகள்	20	28	560	15	30	450
உதவி பெறுத பள்ளிகள்	15	25	375	10	25	250
இரவுப் பள்ளிகள்	12	30	360	10	30	300
	100	148	3035	90	175	3500

நகர் 'அ' :

$$\text{சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{148}{5}$$

$$= \text{ரூ. } 29{\cdot}6$$

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w}$

$= \frac{3035}{100}$

$=$ ரூ. 30·35

நகர் 'ஆ':

சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{175}{5}$

$=$ ரூ. 35

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w}$

$= \frac{3500}{90}$

$=$ ரூ. 38·9

மாதிரி 47

(i) கீழ்க் காணும் பட்டியல், மூன்று பல்கலைக் கழகங்களில் 1957-ம் வருடத் தேர்வு முடிவுகளைத் தருகிறது. எந்தப் பல்கலைக் கழகம் உயர்வானது?

தேர்வுகள்	பல்கலைக் கழக தேர்வு முடிவுகளின் சதவீதம்		
	அ	ஆ	இ
M.A.	80	70	70
M.Sc.	65	70	60
B.A.	70	80	70
B.Sc.	60	70	80
B.Com.	75	60	70

(ii) பாடத் திட்டம், பாடமுறை, வசதிகள், மாணவர் எண்ணிக்கை போன்றவற்றைக் கணக்கிட்டு, கீழ்க் கண்ட நிறைகள் மேற்கண்ட பல்கலைக் கழகங்களின் மாறுபட்ட தேர்வுத் தொடர்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்டனவெனில், அப் பல்கலைக் கழகங்களின் தேர்வு முடிவுகளின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட்டு ஒப்பிடுக.

தேர்வுகள்	பல்கலைக் கழக தேர்வு முடிவுகளின் நிறை		
	அ	ஆ	இ
M.A.	3	3	5
M.Sc.	2	3	5
B.A.	10	15	20
B. Sc.	6	8	10
B. Com.	4	6	10

சாதாரணக் கூட்டுச் சராசரி :

$$\text{‘அ’ பல்கலைக் கழகத்தில்} = \frac{80+65+70+60+75}{5}$$

$$= 70\%$$

$$\text{‘ஆ’ பல்கலைக் கழகத்தில்} = \frac{70+70+80+70+60}{5}$$

$$= 70\%$$

$$\text{‘இ’ பல்கலைக் கழகத்தில்} = \frac{70+60+70+80+60}{5}$$

$$= 70\%$$

இங்கு, சாதாரணக், கூட்டுச் சராசரி மூன்று பல்கலைக் கழகங்களுக்கும் ஒரே அளவாக இருப்பதால், அ, ஆ, இ பல்கலைக் கழகங்களின் படிப்பின் திட்ட அளவைப் பற்றி ஒரு மாற்றத்தையும் காட்டவில்லை. ஆகவே, இங்கு கொடுக்கப்பட்ட எடைகளைக் கொண்டு, கூட்டுச் சராசரி காணவேண்டும்.

(ii) நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல்

'அ' பல்கலைக் கழகம் :

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல்:

தேர்வுகள்	x_1	w_1	$(x_1 \times w_1)$
M.A.	80	3	240
M.Sc.	65	2	130
B.A.	70	15	700
B.Sc.	60	6	360
B.Com.	75	4	300
		25	1730

$$\text{நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி } \bar{x}_1 = \frac{\Sigma x_1 w_1}{\Sigma w_1}$$

$$= \frac{1730}{25}$$

$$= 69{\cdot}2\%$$

'ஆ' பல்கலைக் கழகம் :

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல்:

தேர்வுகள்	x_2	w_2	$x_2 \times w_2$
M.A.	70	3	210
M.Sc.	70	3	210
B.A.	80	15	1200
B.Sc.	70	8	560
B.Com.	60	6	360
		35	2540

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\overline{x_2} = \frac{\Sigma x_2 w_2}{\Sigma w_2}$

$= \frac{2540}{35}$

$= 75 \cdot 57\%$

'இ' பல்கலைக் கழகம் :

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

தேர்வுகள்	x_3	w_3	$x_3 \times w_3$
M.A.	70	5	35
M.Sc.	60	5	300
B.A.	70	20	1400
B·Sc.	80	10	800
B.Co n.	70	10	700
		50	3550

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\overline{x_3} = \frac{\Sigma x_3 w_3}{\Sigma w_3}$

$= \frac{3550}{50}$

$= 71\%$

கொடுக்கப்பட்ட எடைகளைக் கொண்டு கூட்டுச் சராசரி கணக்கிட்டதில் 'ஆ' பல்கலைக் கழகம் படிப்பில் உயர் திட்டத்தைக் கொண்டுள்ளது எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 48

கீழ்க்கண்ட பட்டியல் ஓர் அச்சுக்கூடத்தில் செலவாகிய தாள்களின் எடையையும் விலையையும் கொடுக்கிறது. கீழ்க்காணும் இரண்டு வருடங்களில் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரிகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசத்தைக் கணக்கிடுக.

விவரம்	பவுண்டின் விலை		நுகர் அளவு டன்களில்	
	1942	1943	1942	1943
வெள்ளை	0— 7—2	0— 8—6	17	110
பழுப்பு நிறம்	0— 6—6	0— 7—6	6	80
மற்றவை	0—13—0	0—15—0	14	10

(பி.காம்.—காசி—1950)

தீர்வு :

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

தாள்கள்	1942			1943		
	விலை (x)	அளவு (w)	பெருக்கல் (xw)	விலை (y)	அளவு (v)	பெருக்கல் (yv)
வெள்ளை	0— 7—2	17	0— 8—6	0— 8—6	11·5	0— 1—9
பழுப்பு	0— 6—6	6	0— 7—6	0— 7—6	8·5	3—15—9
மற்றவை	0—13—0	14	0—15—0	0—15—0	10	9— 6—0
		37	21—6—10		30	19—7—6

1942-ம் ஆண்டு :

விலையின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\overline{x}$ $= \dfrac{\text{ரூ. } 21—6—10}{37}$

$=$ ரூ. 0—9—3

1943-ம் ஆண்டு :

விலையின் நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி $\overline{x}$ $= \dfrac{\text{ரூ. } 19—9—6}{30}$

$=$ ரூ. 0—10—2

இறப்பு, பிறப்பு ....வீதம் பற்றிய மாதிரிகள்.

மாதிரி 49

கீழ்க் காணும் உள்ளூர் மக்கள் தொகைப் புள்ளி விவரங்களுக்குத் தரப்படுத்தப்பட்ட, தரப்படுத்தப்படாத இறப்பு வீதங்களைக்

கணக்கிடுக. பின்பு அவற்றைத் தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள் தொகையின் தரப்படுத்தப்படாத இறப்பு வீதத்துடன் ஒப்பிடுக.

வயதுப் பிரிவு (ஆண்டுகளில்)	தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள் தொகை		உள்ளூர் மக்கள் தொகை	
	மக்கள்தொகை	இறப்பு	மக்கள்தொகை	இறப்பு
0— 10	600	18	400	16
10— 20	1000	5	1500	6
20— 60	3000	24	2400	24
60—100	400	20	700	21
மொத்தம்	5000	67	5000	67

(பி. காம்.—1960)

தீர்வு :

தரப்படுத்தப்படாத, தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதங்கள் கணக்கிடல் :

வயதுப் பிரிவு (ஆண்டுகளில்)	தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள்			உள்ளூர் மக்கள் தொகை		
	மக்கள் தொகை	இறப்பு	1000 பேருக்கு இறப்பு வீதம்	மக்கள் தொகை	இறப்பு	1000 பேருக்கு இறப்பு வீதம்
0— 10	600	18	30	400	16	40
10— 20	1000	5	5	1500	6	4
20— 60	3000	24	8	2400	24	10
60—100	400	20	50	700	21	30
மொத்தம்	5000	67	13·4	5000	67	13·4

உள்ளூர் மக்கள் தொகைக்கு, தரப்படுத்தப்படாத இறப்பு வீதம்

$$= \frac{(400 \times 40) + (1500 \times 4) + (2400 \times 10) + (700 \times 30)}{600 + 1000 + 3000 + 400}$$

$$= \frac{67000}{5000}$$

$$= 13 \cdot 4$$

தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள் தொகைக்கு, தரப்படுத்தப்படாத இறப்பு வீதம்

$$= \frac{(600 \times 30) + (1000 \times 5) + (3000 \times 8) + (400 \times 50)}{600 + 1000 + 3000 + 400}$$

$$= \frac{67000}{5000}$$

$$= 13 \cdot 4$$

உள்ளூர் மக்கள் தொகையின் தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம்

$$= \frac{(600 \times 40) + (1000 \times 4) + (3000 \times 10) + (400 \times 30)}{600 + 1000 + 3000 + 400}$$

$$= \frac{70000}{500}$$

$$= 14$$

மாதிரி 50

(1) தரப்படுத்தப்பட்ட வயதுப் பரவலுக்கு உனது நாடு முழுவதையும் எடுத்துக் கொண்டும்,

(2) நீ வசிக்கும் உள்ளூர் நிர்வாகப் பரப்பை எடுத்துக் கொண்டும், மக்கள் தொகை, வேலையற்றோர் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றின் புள்ளி விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

6

	வயது (ஆண்டுகளில்)				
	15—30	30—45	45—60	60—	மொத்தம்
தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள் தொகை :	250	350	300	100	1000
வயதுப் பிரிவு : வேலையற்றோர் வீதத்தின் சதவீதம்	5	8	12	15	—
உள்ளூர் மக்கள் தொகை :	800	300	350	50	1000
வேலையற்றோர் வீதத்தின் வயதுப் பிரிவு சதவீதம்	4	9	12	20	—

(பி. சி. எஸ். —1956)

தீர்வு :

தரப்படுத்தப்படாத வேலையற்றோர் வீதத்தைக் கணக்கிடல் :

வயது	தரப்படுத்தப்பட்டுள்ள மக்கள் தொகை		உள்ளூர் மக்கள்தொகை	
	மக்கள் தொகை	வேலையற்றோர் வீதம் (சதவீதத்தில்)	மக்கள் தொகை	வேலையற்றோர் வீதம் (சதவீதத்தில்)
15—30	250	5	300	4
30—45	350	8	300	9
45—60	300	12	350	12
60—	100	5	50	20
	1000		1000	

(1) நாடு முழுமைக்கும் தரப்படுத்தப்பட்ட வேலையற்றோர் வீதம்

$$= \frac{(250 \times 5)+(350 \times 8)+(300 \times 12)+(100 \times 15)}{(250 + 350 + 300 + 100)}$$

$$= \frac{9150}{1000} = 9{\cdot}15\%$$

(2) உள்ளூர் மக்கள் தொகைக்கு, தரப்படுத்தப்பட்ட வேலையற்றோர் வீதம்

$$= \frac{(250 \times 4) + (350 \times 9) + (300 \times 12) + (100 \times 20)}{(250+350+300+100)}$$

$$= \frac{9750}{1000} = 9{\cdot}75\%$$

(3) உள்ளூர் மக்கள் தொகைக்கு, தரப்படுத்தப்படாத வேலையற்றோர் வீதம்

$$= \frac{(300 \times 4) + (300 \times 9) + (350 \times 12) + (50 \times 20)}{(300 + 300 + 350 + 50)}$$

$$= \frac{9100}{1000} = 9{\cdot}1\%$$

மாதிரி 51

A, *B*, என்ற கல்லூரிகளின் தேர்வு முடிவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. எந்தக் கல்லூரி உயர்வானது எனக் கூறு.

தேர்வுகள்	கல்லூரி *A*		கல்லூரி *B*	
	எழுதியவர்கள்	தேறியவர்கள்	எழுதியவர்கள்	தேறியவர்கள்
M. A.	30	25	100	80
M. Com.	50	45	120	95
B. A.	200	150	100	70
B. Com.	120	75	80	50
மொத்தம்	400	295	400	285

(எம். காம்,—வெங்கடேசுவரா)

தீர்வு :

தேர்வுகள்	கல்லூரி *A*		கல்லூரி *B*	
	எழுதியவர்கள்	தேறியவர்கள் (சதவீதத்தில்)	எழுதியவர்கள்	தேறியவர்கள் (சதவீதத்தில்)
M. A.	30	83·33	100	80
M. Com.	50	90	120	79·17
B. A.	200	75	100	70
B. Com.	120	62·5	80	62·5
மொத்தம்	400		400	

கல்லூரி '*A*'-ல் தேறியவர்களின் சதவீதம்

$$= \frac{(30\times83\cdot33)+(50\times90)+(200\times75)+(120\times62\cdot5)}{400}$$

$=73\cdot75\%$

கல்லூரி '*B*'-ல் தேறியவர்களின் சதவீதம்.

$$= \frac{(100\times80)+(120\times79\cdot17)+(100\times70)+(80\times62\cdot5)}{400}$$

$= 73\cdot75\%$

கல்லூரி '*B*'-ன் தரப்படுத்தப்பட்ட தேறியவர்களின் சதவீதம்

$$= \frac{(20\times80)+(50\times79\cdot17)+(200\times70)+(120\times62\cdot5)}{400}$$

$= 69\cdot646\%$

ஆகவே, கல்லூரி '*A*' உயர்வானது எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 52

கீழ்க் காணும் இரண்டு இடங்களின் இறப்பு வீதப் புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு எந்த இடத்தில் இருப்பவர்கள் அதிக உடல் நலம் உடையவர்கள் எனக் காட்டு.

வயது (ஆண்டுகளில்)	'அ' நகர் (தரப்படுத்தப்பட்டது)		'ஆ' நகர் (உள்ளூர்)	
	மக்கள்தொகை	இறப்பு	மக்கள்தொகை	இறப்பு
0—10	15,000	375	10,000	300
10—30	50,000	250	52,000	312
30—70	1,20,000	840	1,26,000	1008
70-க்கு மேல்	15,000	975	12,000	840

(புள்ளியியல் - கோசும், சௌத்ரியும் - ப. 181)

தீர்வு :

வயது (ஆண்டுகளில்)	'அ' நகர்-தரப்படுத்தப்பட்டது			'ஆ' நகர் உள்ளூர்		
	மக்கள் தொகை	இறப்பு	1000 பேருக்கு இறப்பு வீதம்	மக்கள் தொகை	இறப்பு	1000 பேருக்கு இறப்பு வீதம்
0—10	15,000	375	25	10,000	300	30
10—30	50,000	250	5	52,000	312	6
30—70	1,20,000	840	7	1,26,000	1008	8
70-க்கு மேல்	15,000	975	65	12,000	840	70
	2,00,000			2,00,000		

(1) 'அ' நகரின் தரப்படுத்தப்படாத இறப்பு வீதம்

$$= \frac{(15{,}000 \times 25)+(50{,}000 \times 5)+(1{,}20{,}000 \times 7)+(15{,}000 \times 65)}{(15{,}000+50{,}000+1{,}20{,}000+15{,}000)}$$

$$= \frac{24,40,000}{2,00,000}$$

= 12·2 இறப்பு (1000 பேருக்கு) (தோராயமாக)

(2) 'ஆ' நகரின் தரப்படுத்தப்படாத இறப்பு வீதம்

$$= \frac{(10,000 \times 30)+(52,000 \times 6)+(1,26,000 \times 8)+(12,000 \times 70)}{(10,000+52,000+1,26,000+12,000)}$$

$$= \frac{24,60,000}{2,00,000}$$

= 12·3 இறப்பு (1000 பேருக்கு) (தோராயமாக)

ஆகவே, 'அ' நகரத்தினர், 'ஆ' நகரத்தினரை விட உடல் நலம் மிக்கவர்கள் எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 53

கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்கு, '*A*', '*B*' என்ற நகரங்களின் தரப் படுத்தப்படாத இறப்பு வீதத்தைக் காண். மேலும் '*B*' நகருடன் ஒப்பிட்டு, '*A*' நகரின் இறப்பு வீதத்தைக் கணக்கிடு. இந்த இரண்டு நகரங்களில் எந்த நகரில் இருப்பவர்கள் சிறந்த உடல் நலத்துடன் திகழ்கிறார்கள் என்று கண்டுபிடி.

வயது ஆண்டு களில்	நகர் '*A*'		நகர் '*B*'	
	மக்கள் தொகை (ஆயிரங்களில்)	இறப்பு	மக்கள் தொகை (ஆயிரங்களில்)	இறப்பு
0— 5	25	550	10	220
5—15	40	280	15	105
15—35	60	720	20	240
35-க்கு மேல்	15	525	15	525

தீர்வு :

பொது இறப்பு விதத்தைக் கணக்கிடல் :

வயதுப் பிரிவு (ஆண்டு களில்)	'A' நகர்			'B' நகர்'		
	மக்கள் தொகை (ஆயிரத்தில்)	இறப்பு	இறப்பு விதம் (1000 பேருக்கு)	மக்கள் தொகை (ஆயிரத்தில்)	இறப்பு	இறப்பு விதம் (1000 பேருக்கு)
0— 5	25	550	22	10	220	22
5 — 15	40	280	7	15	105	7
15—35	60	720	12	20	240	12
35-க்கு மேல்	15	525	35	15	525	35
மொத்தம்	140	2075	14·8	60	1090	18·1

(1) நகர் 'A'-ன் பொது இறப்பு விதம் (நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி)

$$= \frac{(25 \times 22) + (40 \times 7) + (60 \times 12) + (15 \times 35)}{(25 + 40 + 60 + 15)}$$

$$= \frac{2075}{140}$$

$$= 14{\cdot}8$$

(2) நகர் 'B'-ன் பொது இறப்பு விதம் (நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி)

$$= \frac{(10 \times 22) + (15 \times 7) + (20 \times 12) + (15 \times 35)}{(10 + 15 + 20 + 15)}$$

$$= \frac{1090}{60}$$

$$= 18{\cdot}1$$

(3) நகர் 'B'யுடன் ஒப்பிடப்பட்ட நகர் 'A'-ன் தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள் தொகையின் இறப்பு விதம்

$$= \frac{(22 \times 10) + (7 \times 15) + (12 \times 20) + (35 \times 15)}{(10 + 15 + 20 + 15)}$$

$$= \frac{1090}{60}$$

$$= 18 \cdot 1$$

ஆகவே, இரண்டு நகரங்களிலும் வசிப்பவர்கள் சமமான உடல் நலம் பெற்றவர்கள் எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 54

கீழ்க் கண்ட இரண்டு இடங்களில் வசிப்பவர்களுள் எந்த இடத்தில் வசிப்பவர்கள் இறப்பு வீதம் அதிகமுடையவர்களாக இருக்கிறார்கள் எனக் கண்டுபிடி.

வயது (ஆண்டுகளில்)	நகர் *I*		நகர் *II*	
	மக்கள் தொகை	இறப்பு	மக்கள் தொகை	இறப்பு
20—40	5,10,000	2050	2,95,000	1000
40—60	2,45,000	2550	3,40,000	2750
60-க்கு மேல்	20,000	1200	50,000	3000

(புள்ளியியல் - ரூபேயும் அகர்வாலும் - ப. 114)

தீர்வு :

வயது (ஆண்டுகளில்)	நகர் *I*			நகர் *II*		
	மக்கள் தொகை	இறப்பு	இறப்பு வீதம் (1000 பேருக்கு)	மக்கள் தொகை	இறப்பு	இறப்பு வீதம் (1000 பேருக்கு)
20—40	5,10,000	2050	5	2,95,000	1000	3
40—60	2,45,000	2550	10	3,40,000	2750	8
60-க்கு மேல்	20,000	1200	60	50,000	3000	60
	7,75,000	5,800	8·0	6,85,000	6750	9·6

(1) நகர் *I*-ன் தரப்படுத்தப்படாத மக்கள் தொகையின் இறப்பு வீதம் (நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி)

$$= \frac{(5,10,000 \times 5) + (2,45,000 \times 10) + (20,000 \times 60)}{5,10,000 + 2,45,000 + 20,000}$$

$$= \frac{62,00,000}{7,75,000}$$

= 8·0 (ஆயிரத்திற்கு) (தோராயமாக)

(2) நகர் *II*-ன் தரப்படுத்தப்படாத இறப்பு வீதம் (நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி)

$$= \frac{(2,95,000 \times 3) + (3,40,000 \times 8) + (50,000 \times 60)}{(2,95,000 + 3,40,000 + 50,000)}$$

$$= \frac{66,10,000}{6,85,000}$$

= 9·6 (ஆயிரத்திற்கு) (தோராயமாக)

ஆகவே, நகர் *II*-ல் வசிப்பவர்கள் நகர் *I*-ல் வசிப்பவர்களை விட இறப்பு வீதம் அதிகமுடையவர்கள் எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 55

கீழ்க் காணும் பரவலுக்கு, தரப்படுத்தப்படாத, தரப்படுத்தப் பட்ட இறப்பு வீதங்களைக் கணக்கிட்டு, உள்ளூர் மக்கள் தொகை, உயரிய அல்லது குறைந்த இறப்பு வீதத்தைக் கொண்டுள்ளதா எனக் காட்டு.

வயதுப் பிரிவு (ஆண்டு களில்)	தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள் தொகை		உள்ளூர் மக்கள் தொகை	
	மக்கள் தொகை	இறப்பு	மக்கள் தொகை	இறப்பு
0—5	6,000	150	2,500	63
5—15	10,000	20	12,500	25
15—65	12,500	50	20,000	80
65-க்குமேல்	4,000	160	5,000	200

(புள்ளியியல் - கோசும், சௌத்ரியும் - ப - 181)

தீர்வு :

வயதுப் பிரிவு ஆண்டு களில்	தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள் தொகை			உள்ளூர் மக்கள் தொகை		
	மக்கள் தொகை	இறப்பு	இறப்பு வீதம் (1000 பேருக்கு)	மக்கள் தொகை	இறப்பு	இறப்பு வீதம் (1000 பேருக்கு)
0— 5	6,000	150	25	2,500	63	25·2
5—15	10,000	20	2	12,500	25	2
15—65	12,500	50	4	20,000	80	4
65-க்கு மேல்	4,000	160	40	5,000	200	40
மொத்தம்	32,500		11·69	40,000		9·2

(1) தரப்படுத்தப்பட்ட மக்களின் தரப்படுத்தப்படாத இறப்பு வீதம்

$$= \frac{(6,000 \times 25)+(10,000 \times 2)+(12,500 \times 4)+(4,000 \times 40)}{6,000 + 10,000 + 12,500 + 4,000}$$

$$= \frac{3,80,000}{32,500}$$

= 11·69 (ஆயிரம் பேருக்கு) (தோராயமாக)

(2) உள்ளூர் மக்கள் தொகைக்கு, தரப்படுத்தப்படாத இறப்பு வீதம்

$$= \frac{(2,500 \times 25{\cdot}2)+(12,500 \times 2)+(20,000 \times 4)+(5,000 \times 40)}{2,500 + 2,500 + 20,000 + 5000}$$

$$= \frac{3,68,000}{40,000}$$

= 9·2 (ஆயிரம் பேருக்கு) (தோராயமாக)

(3) உள்ளூர் மக்கள் தொகைக்கு, தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு வீதம்

$$= \frac{(6,000 \times 25{\cdot}2)+(10,000 \times 2)+(12,500 \times 4)+(4,000 \times 40)}{(6,000 + 10,000 + 12,500 + 4,000)}$$

$$= \frac{4,51,200}{32,500}$$

= 13·8 (ஆயிரம் பேருக்கு) (தோராயமாக)

(4) தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள் தொகைக்கு, தரப்படுத்தப் பட்ட இறப்பு வீதம்

$$= \frac{(2,500 \times 25)+(12,500 \times 2)+(20,000 \times 4)+(5,000 \times 40)}{(2,500 + 12,500 + 20,000 + 5,000)}$$

$$= \frac{3,67,500}{40,000}$$

$= 9{\cdot}18$ (ஆயிரம் பேருக்கு) (தோராயமாக)

ஆகவே, தரப்படுத்தப்பட்ட மக்கள் தொகைப் பிரிவில் வசிக்கும் மக்கள் உள்ளூர் மக்களை விட உடல் நலம் மிக்கவர்களாக விளங்குகிறார்கள் எனக் காண்கிறோம்.

இடை நிலை
(MEDIAN)

மாதிரி 56

கீழ்க் காணும் எண்களின் இடை நிலையைக் காண்.

135, 125, 133, 150, 137, 135, 133, 135, 130.

தீர்வு :

ஏறு வரிசை மதிப்பில் மேற்கண்ட எண்களை எழுதினால் :

125, 130, 133, 133, 135, 135, 135, 137, 150.

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

ஆகவே, இடை நிலை $= 5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.

$= 135$

மாதிரி 57

ஒரு தேர்வில் 10 மாணவர்கள் வாங்கிய மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

32, 36, 24, 40, 28, 21, 45, 51, 22, 42.

(i) இடை நிலை (ii) முதல் கால்மானம் (iii) மூன்றாவது கால்மானம் (iv) மூன்றாவது ஐமானம் (v) ஐந்தாவது எண் மானம் (vi) எட்டாவது பத்துமானம் (vii) அறுபத்தியொன்றாவது நூற்றுமானம் ஆகியவற்றைக் காண்.

தீர்வு :

10 மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களை ஏறு வரிசையில் எழுதினால் :

வரிசை எண்	மதிப்பெண்கள்	வரிசை எண்	மதிப்பெண்கள்
1	21	6	36
2	22	7	40
3	24	8	42
4	28	9	45
5	32	10	51

(1) இடைநிலை

$M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{10+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 5{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பிட் மதிப்பு

$= 5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $+ 0{\cdot}5$ (6 ஆவது உறுப்பு மதிப்பு $-$ 5ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு)

$= 32 + 0{\cdot}5\ (36 - 32)$

$= 32 + 2$

$= 34$ மதிப்பெண்கள்

(2) முதல் கால்மானம்

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{10+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= (2{\cdot}75)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$=$ 2 ஆவது உறுப்பு மதிப்பு $+ 0{\cdot}75$ (3 ஆவது உறுப்பு மதிப்பு—2 ஆவது உறுப்பு மதிப்பு)

$= 22 + 0{\cdot}75\ (24 - 22)$

$= 22 + 1{\cdot}5$

$= 23{\cdot}5$ மதிப்பெண்கள்.

(3) மூன்றாவது கால்மானம் :

$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{10+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 8{\cdot}25$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$=$ 8 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $+ 0{\cdot}25$ (9 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு—8ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு)

$= 42 + 0{\cdot}25\ (35 - 32)$

$= 42 + 0{\cdot}75$

$= 42{\cdot}75$ மதிப்பெண்கள்

(4) மூன்றாவது ஐமானம் :

$Qu_3 = \left[\frac{3(n+1)}{5}\right]$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left[\frac{3(10+1)}{5}\right]$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 6{\cdot}6$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$=$ 6 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு$+0\ 6$ (7ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு—6 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு)

$= 36 + 0{\cdot}6\ (40 - 36)$

$- 36 + 2{\cdot}4$

$= {\cdot}38{\cdot}4$ மதிப்பெண்கள்

(5) ஐந்தாவது எண்மானம் :

$$O_5 = \left[\frac{5(n+1)}{8}\right]$$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$$= \left[\frac{5(10+1)}{8}\right]$$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 6\frac{7}{8}$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 6$ ஆவது உறுப்பு மதிப்பு $+ \frac{7}{8}$ (7ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு —6ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு)

$= 36 + (\frac{7}{8} \times 4)$

$= 39{\cdot}5$ மதிப்பெண்கள்

(6) எட்டாவது பத்துமானம்

$$D_8 = \left[\frac{8(n+1)}{10}\right]$$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$$= \left[\frac{8(10+1)}{10}\right]$$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 8{\cdot}8$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 8$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு$+0{\cdot}8$ (9ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு—8ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு)

$= 42 + 0{\cdot}8\ (45 - 42)$

$= 42 + 2{\cdot}4$

$= 44{\cdot}4$ மதிப்பெண்கள்

(7) அறுபத்தி யொன்றுவது நூறுமானம்

$$P_{61} = \left[\frac{61(n+1)}{100}\right]$$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 6{\cdot}71$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 36 + 0{\cdot}71\ (40 - 36)$

$= 36 + 2{\cdot}84$

$= 38{\cdot}84$ மதிப்பெண்கள்

மாதிரி 58

நியூயார்க் நகரில் முக்கிய வீதியில் ஒருவர் நடந்து செல்லும் பொழுது ஒவ்வொரு கட்டடங்களிலும் கண்டறிந்த மாடிகளின் எண்ணிக்கை விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது :

5, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 20, 5, 6, 32, 8, 27.

இடைநிலை கணக்கிடுக.

(பி.எஸ்ஸி.-சென்னை—1972)

தீர்வு :

ஏறுவரிசையில் மாடிகளின் எண்ணிக்கையை எழுதினால் :

3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 8, 20, 27 32.

இடைநிலை

$$M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= \left(\frac{15+1}{2}\right) \text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= 8\text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= 5 \text{ மாடித் தரைகள்}$$

மாதிரி 59 :

பம்பாயிலுள்ள பங்கு வியாபார நிறுவனத்தின் சில பங்குகளைக் கவனித்த பொழுது, கீழ்க்காணும் விலைகள் காணப் பட்டன :

$100\frac{5}{16}$;	$100\frac{3}{8}$;	$100\frac{1}{4}$;	$100\frac{5}{16}$;
$100\frac{3}{16}$;	$100\frac{1}{4}$;	$100\frac{3}{8}$;	$100\frac{9}{32}$;
$100\frac{11}{32}$;	$100\frac{1}{16}$;	$100\frac{1}{8}$;	100 ;
$99\frac{7}{8}$;	$99\frac{9}{32}$;	$99\frac{11}{32}$;	$99\frac{3}{8}$;
$99\frac{1}{4}$.			

இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

(பி. காம் - காசி - 1957)

தீர்வு :

ஏறு வரிசையில் எழுதப்பட்ட விலைகள் :

உறுப்புகளின் எண்	விலை	உறுப்புகளின் எண்	விலை
1	$99\frac{1}{4}$	10	$100\frac{1}{4}$
2	$99\frac{9}{32}$	11	$100\frac{1}{4}$
3	$99\frac{11}{32}$	12	$100\frac{9}{32}$
4	$99\frac{3}{8}$	13	$100\frac{5}{16}$
5	$99\frac{7}{8}$	14	$100\frac{5}{16}$
6	100	15	$100\frac{11}{32}$
7	$100\frac{1}{16}$	16	$100\frac{3}{8}$
8	$100\frac{1}{8}$	17	$100\frac{3}{8}$
9	$100\frac{3}{16}$		

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{x+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{17+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 9$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 100\frac{3}{16}$

ஆகவே இடைநிலை பங்கு விலை = ரூ. $100\frac{3}{16}$

மாதிரி 60

1961 ஆவது ஆண்டு மக்கள் தொகைக் கணிப்பின்படி 10 நகரங்களின் மக்கள் தொகை (ஆயிரத்தில்) கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

2000, 1180, 1785, 1500, 560, 782, 1209, 385, 1125, 222.

இடைநிலை காண்.

தீர்வு :

10 நகரங்களின் மக்கள் தொகைக் கணிப்பை ஏறு வரிசையில் எழுதினால்

222, 385, 560, 782, 1123, 1180, 1200, 1500, 1785, 2000 ஆகும்.

$$\text{இடைநிலை } M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= \left(\frac{10+1}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= 5{\cdot}5 \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$5{\cdot}5 \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு} = \frac{(1123+1180)}{2} \text{ ஆயிரங்கள்}$$

$$= 1151{\cdot}5 \text{ ஆயிரங்கள்}$$

மாதிரி 61

ஒரு தொலைபேசி மாற்று நிலையத்தில் 45 தொடர்ந்த கூப்பிடுகளுக்கு இடைப்பட்ட அரை நிமிட அளவு இடைவெளிகளின் 44 எண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

6, 1, 16, 19, 13, 9, 2, 2 1, 28, 7, 48, 16, 3, 15, 2, 2, 2, 8, 1, 1, 2, 12, 1, 10, 7, 8, 4, 26, 15, 3, 3, 5, 9, 8, 11, 40, 18, 1, 1, 31, 5, 14, 16.

இடைவெளி எண்களின் இடை நிலையைக் காண்.

(எம்.ஏ. - ஆக்ரா.)

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் ஏறு வரிசை மதிப்பில் எழுதப் பட்டால்,

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2. 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,15, 16, 16, 16, 18, 19, 26, 28, 31, 40, 48.

$$\text{இடைநிலை } M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$= \left(\frac{44+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

= 22·5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

22·5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \frac{\text{22 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு} + \text{23 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}}{2}$

$= \frac{7+8}{2}$

= 7·5 அரை நிமிடங்கள்

ஆகவே, இடைநிலை = 7·5 அரை நிமிடங்கள்

(அல்லது)

= 3·75 நிமிடங்கள்

மாதிரி 62

கீழ்க் காணும் பட்டியல் 25 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் கணித, ஆங்கிலப் பாடங்களில் எடுத்த மதிப்பெண்களைத் தருகிறது.

மாணவரின் வரிசை எண்	கணிதத்தில் மதிப்பெண்	ஆங்கிலத்தில் மதிப்பெண்	மாணவரின் வரிசை எண்	கணிதத்தில் மதிப்பெண்	ஆங்கிலத்தில் மதிப்பெண்
1	29	36	14	47	44
2	65	30	15	60	85
3	33	38	16	30	20
4	45	39	17	32	32
5	51	64	18	52	25
6	72	50	19	54	55
7	48	46	20	56	28
8	33	15	21	58	53
9	42	42	22	49	35
10	25	10	23	38	40
11	28	72	24	40	62
12	35	33	25	46	58
13	46	80			

எந்தப் பாடத்தில் மாணவர்களின் அறிவு அதிகமாக இருக்கிறது ?

தீர்வு :

கணித, ஆங்கிலப் பாடங்களில் இடைநிலை காணல் :

வரிசை எண்	கணிதத்தில் மதிப்பெண்	ஆங்கிலத்தில் மதிப்பெண்	வரிசை எண்	கணிதத்தில் மதிப்பெண்	ஆங்கிலத்தில் மதிப்பெண்
1	25	10	14	46	42
2	28	15	15	47	44
3	29	20	16	48	46
4	30	25	17	49	50
5	32	28	18	51	53
6	33	30	19	52	55
7	33	32	20	54	58
8	35	33	21	56	62
9	38	35	22	58	64
10	40	36	23	60	72
11	42	38	24	63	80
12	45	39	25	72	85
13	46	40			

கணிதப் பாடத்தில் இடைநிலை மதிப்பெண் $\Big\} = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{25+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 13$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 46$ மதிப்பெண்கள்

ஆங்கிலப் பாடத்தில் இடைநிலை மதிப்பெண் $\Big\} = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$$= \left(\frac{25+1}{2}\right) \text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

= 13 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

= 40 மதிப்பெண்கள்

கணிதப் பாடத்தில் இடைநிலை மதிப்பெண் 46 ஆகவும், ஆங்கிலப் பாடத்தில் இடைநிலை மதிப்பெண் 40 ஆகவும் இருப்பதால் மாணவர்களின் அறிவுத் திறன் கணக்கில் அதிகமாக இருக்கிறது எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 63

கீழ்க் காணும் பட்டியல் 20 மாணவர்களைக் கொண்ட குழு ஒன்று ஆங்கிலம், இந்திப் பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களைத் தருகிறது.

மாணவர் எண்	ஆங்கிலத்தில் மதிப்பெண்	இந்தியில் மதிப்பெண்	மாணவர் எண்	ஆங்கிலத்தில் மதிப்பெண்	இந்தியில் மதிப்பெண்
1	53	58	11	25	10
2	54	55	12	42	42
3	52	25	13	33	15
4	32	32	14	48	46
5	30	26	15	72	50
6	60	85	16	51	64
7	47	44	17	45	39
8	46	80	18	33	38
9	35	33	19	65	30
10	28	72	20	29	36

எந்தப் பாட்டத்தில் மாணவர்களின் அறிவுத் திறன் அதிகமாயுள்ளது எனக் காண்.

(எம். ஏ.—பஞ்சாப்—செப்டம்பர் 1951)

தீர்வு :

இடைநிலை மதிப்பெண்களைக் கணக்கிட்டு ஒப்பிடுதல் :

வரிசை எண்	ஆங்கில மதிப்பெண்	இந்தி மதிப்பெண்
1	25	10
2	28	15
3	29	25
4	30	26
5	32	30
6	33	32
7	33	33
8	35	36
9	42	38
10	45	39
11	46	42
12	47	44
13	48	46
14	51	50
15	52	55
16	53	58
17	54	64
18	60	72
19	65	80
20	72	85

ஆங்கிலத்தில் இடைநிலை மதிப்பெண்கள் $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{20+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 10{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$$= \frac{10\text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}+11\text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}}{2}$$

$$= \left(\frac{45+46}{2}\right)$$

= 45·5 மதிப்பெண்கள்.

இந்தியில் இடை நிலை மதிப்பெண் $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{20+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

= 10·5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{39+42}{2}\right)$

= **40·5 மதிப்பெண்கள்**

மாதிரி 64

16 மாணவ மாணவியர் குழுக்களுக்கு ஒரு பொது அறிவுப் போட்டி வைத்து, அதில் அவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன

வரிசை எண்	மாணவரின் மதிப்பெண்கள்	மாணவியரின் மதிப்பெண்கள்	வரிசை எண்	மாணவரின் மதிப்பெண்கள்	மாணவியரின் மதிப்பெண்கள்
1	15	10	9	55	63
2	35	30	10	56	69
3	43	45	11	60	70
4	46	52	12	64	72
5	48	55	13	71	74
6	48	58	14	75	75
7	49	61	15	80	75
8	50	61	16	85	90
			மொத்தம்	880	960

மாணவரா, மாணவியரா, யார் அதிக அறிவு படைத்தவர் எனக் காண்பி. (எம். ஏ.—1954)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

மாணவர் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{880}{16}$

$= 55$ மதிப்பெண்கள்

மாணவியர் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி $y = \frac{\Sigma y}{n}$

$= \frac{960}{16}$

$= 60$ மதிப்பெண்கள்

இடைநிலை கணக்கிடல் :

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்கள் ஏறுவரிசையில் இருப்பதால் இடைநிலையைச் சுலபமாகக் கணக்கிடலாம்.

மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களின் இடைநிலை

$= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{16+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 8{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \frac{8\text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு} + 9\text{ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}}{2}$

$= \frac{50+55}{2}$

$= 52{\cdot}5$ மதிப்பெண்கள்

மாணவியர் எடுத்த மதிப்பெண்களின் இடைநிலை

$= 8{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{61+63}{2}\right)$

$= 62$ மதிப்பெண்கள்

ஆகவே, மாணவியரின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்கள், இடைநிலை மதிப்பெண்கள் முறையே மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்கள், இடைநிலை மதிப்பெண்களைவிட அதிகமாக இருப்பதால் மாணவியர், மாணவர்களை விட அதிக அறிவு படைத்தவர்கள் எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 65

மாதிரி 6-ல் கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலிலுள்ள 25 மாணவர்கள் பொருளாதாரம் அரசியல் பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களுக்கு இடைநிலையைக் கண்டு, ஒப்பிட்டு எந்தப் பாடத்தில் மாணவர்கள் அதிக அறிவு படைத்தவர்களாக இருக்கிறார்கள் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

இடைநிலைகளைக் கணக்கிடல் : (மதிப்பெண்கள் இறங்கு வரிசை மதிப்பில் எழுதப்பட்டுள்ளது.)

வரிசை எண்	பொருளாதாரத்தில் மதிப்பெண்	அரசியலில் மதிப்பெண்	வரிசை எண்	பொருளாதாரத்தில் மதிப்பெண்	அரசியலில் மதிப்பெண்
1	72	85	14	45	39
2	65	80	15	42	38
3	60	72	16	40	36
4	58	64	17	38	35
5	56	62	18	35	33
6	54	58	19	33	32
7	52	55	20	33	30
8	51	53	21	32	28
9	49	50	22	30	25
10	48	46	23	29	20
11	47	44	24	28	15
12	46	42	25	25	10
13	46	40			

பொருளாதாரப் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் இடைநிலை M_e $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{25+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 13$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 46$ மதிப்பெண்கள்

அரசியல் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் இடைநிலை M_e $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{25+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 13$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 40$ மதிப்பெண்கள்

இங்கு, பொருளாதாரப் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் இடைநிலை, அரசியல் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் இடைநிலையை விட அதிகமாக இருப்பதால், மாணவர்கள் பொருளாதாரப் பாடத்தில் அதிக அறிவு படைத்தவர்களாகத் திகழ்கிறார்கள் எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 66

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு இடைநிலையைக் காண் :

கூலி (ரூபாயில்)	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
கூலியாட்களின் எண்ணிக்கை	22	38	46	35	20

தீர்வு :

இடைநிலை காணல் :

கூலி (ரூபாயில்)	கூலியாட்களின் எண்ணிக்கை	குவி அலைவெண்
0—10	22	22
10—20	38	60
20—30	46	106
30—40	35	141
40—50	20	161

இடைநிலை காணும் சூத்திரம் $M_e = l_1 + \dfrac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$

$$= 20 + \frac{\frac{(161+1)}{2} - 60}{46} \times 10$$

$$= 20 + \frac{21 \times 10}{46}$$

= ரூ. 24·57

இடைநிலைக் கூலி = ரூ. **24·57**

மாதிரி 67

கீழ்க் காணும் பட்டியலை மாற்றியமைத்து இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

அளவுகள்	10—15	15—17·5	17·5—20	20—30
அலைவெண்	10	15	17	25
அளவுகள்	30—35	35—40	40—40-க்கு மேல்	
அலைவெண்	28	30	40	

(பி.காம்.—அலகாபாத்—1942)

தீர்வு :

பல வழிகளில் மேலே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பட்டியலை மாற்றி அமைக்கலாம். ஒரே இடைவெளியுடைய பிரிவுகளை அமைப்பதன் பொருட்டு மேற்கண்ட பட்டியலைக் கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றியமைக்கிறோம்.

I அளவு	II அலைவெண்	III குவி அலைவெண்
10—20	10+15+17=42	42
20—30	25	67
30—40	58	125
40—50	40	165
	$n = 165$	

இடைநிலை M_e $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{165+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 83$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

83 ஆவது உறுப்பு (30—40) என்ற பிரிவிற்குள் விழுகிறது.

இடைநிலை காணும் சூத்திரம்
$$M_e = l_1 + \frac{\frac{(n+1)}{2} - m}{f} \times C$$

$$= 30 + \frac{83-67}{58} \times 10$$

$$= 30 + \frac{160}{58}$$

$$= 30 + 2{\cdot}75$$

$$= 32{\cdot}75$$

இடைநிலை அளவு $= $ **32·75** (தோராயமாக)

மாதிரி 68

கீழ்க் காணும் பரவல் பட்டியலில் சில தொழிலாளர்களின் மாத வருமானம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இதிலிருந்து அவர்களின் இடைநிலை வருமானத்தைக் காண்.

மாத வருமானம் (ரூபாய்)	எண்ணிக்கை	மாத வருமானம் (ரூபாய்)	எண்ணிக்கை
100-க்குக் கீழ்	28	350—399	52
100—149	34	400—449	43
150—199	69	450—499	28
200 249	72	500—549	19
250—299	78	550ம்—550க்கு	14
300—349	63	மேலேயும்	

(பி.ஏ.—சென்னை—1971)

தீர்வு :

முதலில் குவி அலைவெண் கண்டு, பின் இடைநிலை கணக்கிடுவோம்.

மாத வருமானம் (ரூபாயில்) x	எண்ணிக்கை f	குவி எண்ணிக்கை $c.f.$
—100	28	28
100—149	34	62
150—199	69	131
200—249	72	203
250—299	78	281
300—349	63	344
350—399	52	396
400—449	43	439
450—499	28	467
500—549	19	486
550—	14	500
	500	

இடைநிலை வருமானம் $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது

$\left(\frac{500+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது 250·05 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

250·5ஆவது உறுப்பு, 249·5—299·5 என்ற பிரிவில் வருகிறது.

$$\text{ஆகவே, இடைநிலை} = l_0 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - C}{f} \times h$$

$$= 249{\cdot}5 + \frac{250{\cdot}5 - 203}{78} \times 50$$

$$= 249{\cdot}5 + 30{\cdot}45$$

$$= \text{ரூ. } 279{\cdot}95$$

மாதிரி 69

கீழ்க் காணும் பட்டியலிலுள்ள ஒரு சோதனைத் தேர்வின் முடிவுகளின் அலைவெண் பரவலுக்கு இடைநிலையைக் காண்.

சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கைப் பிரிவு	0—5	6—11	12—17	18—23	24—29	30—35
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	13	28	49	38	10

(பி. எஸ்ஸி. – சென்னை—1972)

தீர்வு :

குவி அலைவெண் பட்டியல் :

பிரிவு	அலை வெண் f	குவி அலைவெண் $C.f$
0— 5	2	2
6—11	13	15
12—17	28	43
18—23	49	93
24—29	38	130
30—35	10	140
	140	

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{140\times 1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 70{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

(70·5) ஆவது உறுப்பு 17·5—23·5 பிரிவில் வருகிறது.

ஆகவே, இடைநிலை $M_e = 17{\cdot}5 + \frac{70{\cdot}5 - 43}{49} \times 6$

$= 17{\cdot}5 + \frac{27{\cdot}5 \times 6}{49}$

$= 17{\cdot}5 + 3{\cdot}37$

$= \mathbf{20{\cdot}87}$

மாதிரி 70

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு இடைநிலை காண் :

பிரிவு இடைவெளி	155—157	158—160	161—163	164—166	167—169
அலைவெண்	4	8	26	53	89
பிரிவு இடைவெளி	170—172	173—175	176—178	179—181	
அலைவெண்	62	48	14	6	

(பி. ஏ. - மதுரை—1970)

தீர்வு :

முதலில் குவி அலைவெண் கண்டு, பின் இடைநிலை கணக்கிடுகிறோம்.

பிரிவு	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் cf
155—157	4	4
158—160	8	12
161—163	26	38
164—166	53	91
167—169	89	180
170—172	62	242
173—175	48	290
176—178	14	304
179—181	6	310
	310	

இடைநிலை $M_e = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\dfrac{310+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 155{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

155·5 ஆவது உறுப்பு 166·5—169·5 பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே இடைநிலை $M_e = l_o + \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{2}\right) - C}{f} \times h$

$$= 166{\cdot}5 + \frac{155{\cdot}5 - 91}{89} \times 3$$

$$= 166{\cdot}5 + \frac{64{\cdot}5 \times 3}{89}$$

$$= 166{\cdot}5 + 2{\cdot}1742$$

$$= 168{\cdot}6742$$

மாதிரி 71

கீழ்க் காணும் பட்டியல் ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை பார்க்கும் வேலையாட்களின் பரவலைத் தருகிறது. இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

வயதுப் பிரிவு	20—25	25—30	30—35	35—40
வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	25	35	55	90
வயதுப் பிரிவு	40—45	45—50	50—55	55—60
வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	75	59	41	20

(பி.ஏ.-சென்னை-1972.)

தீர்வு :

முதலில் குவி அலைவெண் கண்டு, பின்பு இடைநிலை காண வேண்டும்.

வயது	அலைவெண்	குவி அலைவெண்
20—25	25	25
25—30	35	60
30—35	55	115
35—40	90	205
40—45	75	280
45—50	59	339
50—55	41	380
55—60	20	400
	400	

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{400+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 200{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

200·5 ஆவது உறுப்பு 35—40 என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே, இடைநிலை $= 35 + \frac{200.5 - 115}{90} \times 5$

$= 35 + \frac{85.5 \times 5}{90}$

$= 35 + 4.75$

$= \mathbf{39.75}$

மாதிரி 72

கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்கு அலைவெண் பரவலுக்கு இடைநிலை காண்.

பிரிவு x	10—10·9	11—11·9	12—12·9	13—13·9	14—14·9
அலைவெண் f	2	9	27	79	85
பிரிவு x	15—15·9	16—16·9	17—17·9	18—18·9	
அலைவெண் f	44	26	18	5	

(பி. எஸ்ஸி.—சென்னை—1969)

தீர்வு :

குவி அலைவெண் பட்டியல் :

பிரிவு	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$
10—10 9	2	2
11 11·9	9	11
12—12·9	27	38
13—13·9	79	117
14—14·9	85	202
15—15·9	44	246
16—16·9	26	272
17—17·9	18	290
18—18·9	5	295
மொத்தம்	295	

$$\text{இடை நிலை} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= \left(\frac{295+1}{2}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= 148 \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

148 ஆவது உறுப்பு (13·95—14·95) என்ற பிரிவில் விழுகிறது. ஆகவே,

$$\text{இடைநிலை } M_e = 13·95 + \frac{148-117}{85} \times 1$$

$$= 13·95 + \frac{31 \times 1}{85}$$

$$= 13·95 + 0·365$$

$$= 14·315$$

மாதிரி 73

கீழ்க் காணும் பரவல் 136 மனிதர்களின் 10 ஆண்டு வயதுப் பிரிவுகள் ஆகும். பரவலுக்குச் சரியாகப் பொருந்தும் ஏதாவது ஒரு மைய நிலைப்போக்கு அளவைக் கணக்கிடுக.

வயதுப் பிரிவு	0–9	10—19	20—29	30–39
மனிதர்களின் எண்ணிக்கை	48	26	27	11
வயதுப் பிரிவு	40—49	50–59	60—69	70-ம் அதற்கு மேலும்
மனிதர்களின் எண்ணிக்கை	13	4	3	4

(எம்·ஏ. சென்னை..1960)

தீர்வு :

மேற்கண்ட பரவல் உயரிய அளவில் கோட்டமுடையதாக இருப்பதைக் காண்கிறோம். இருபக்கக் கடைசி மதிப்புகள் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பை மாற்றுவதாலும்; இயல் நிலைப் பரவலுக்கு மட்டுமே முகடு உயர்ந்த அளவில் மையநிலைப் போக்கு அளவாக இருப்பதாலும் இங்கே தரப்பட்ட அலைவெண் பரவலுக்கு இடைநிலைச் சராசரியே பொருத்தமான மைய நிலைப் போக்கு அளவாகும். மேற்கண்ட பரவல் உயரிய அளவில் கோட்டமுடையதாக இருப்பதாலும், இடைவெளியற்றதாக இருப்பதாலும், இடைவெளி உடையதாக மாற்ற இடைநிலையைக் கணக்கிடுகிறோம்.

வயதுப் பிரிவு	ஆட்களின் எண்ணிக்கை f	குவி அலைவெண் $c.f$
0— 9·5	48	48
9·5—19·5	26	74
19·5—29·5	27	101
29·5—39·5	11	112
39·5—49·5	13	125
49·5—59·5	4	129
59·5—69·5	3	132
69·5-ம் அதற்கு மேலும்	4	136
	$n = 136$	

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{136+1}{2}\right)$ ஆவது

அல்லது (68·5) ஆவது உறுப்பின் வயதாகும்.

(68·5) ஆவது உறுப்பின் வயது (9·5—19·5) என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

$$\text{ஆகவே இடைநிலை } M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 9{\cdot}5 + \frac{68{\cdot}5 - 48}{26} \times 10$$

$$= 17{\cdot}4 \text{ வயது (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 74

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு இடைநிலையைக் காண்.

பிரிவு இடைவெளி	100—104	105—109	110—114	115—119
அலைவெண்	4	14	60	138
பிரிவு இடைவெளி	120—124	125—129	130—134	135—139
அலைவெண்	206	298	380	450
பிரிவு இடைவெளி	140—144	145—149	150—154	155—159
அலைவெண்	500	430	260	128
பிரிவு இடைவெளி	160—164	165—169	170—174	மொத்தம்
அலைவெண்	66	28	12	2974

(ஐ. ஏ. & ஏ. எஸ்.)

தீர்வு :

இடைநிலை கணக்கிடல் :

மாற்றியமைக்கப்பட்ட பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண் f	குவி அலை வெண் $c.f$
99·5—104·5	4	4
104·5—109·5	14	18
109·5—114·5	60	78
114·5—119·5	138	216
119·5—124·5	206	422
124·5—129·5	298	720
129·5—134·5	380	1100
134·5—139·5	450	1550
139·5—144·5	500	2050
144·5—149·5	430	2480
149·5—154·5	260	2740
154·5—159·5	128	2868
159·5—164·5	66	2934
164·5—169·5	28	2962
169·5—174·5	12	2974

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{29\cdot74+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது (1487·5) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு.

இங்கு, 1487·5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு (134·5—139·5) என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

$$\text{ஆகவே, இடைநிலை } M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 134{\cdot}5 + \frac{(1487{\cdot}5 - 1100)}{450} \times 5$$

$$= 134{\cdot}5 + \frac{387{\cdot}5 \times 5}{450}$$

$$= 138{\cdot}8$$

ஆகையால், இங்கு இடை நிலை மதிப்பு = 138·8 எனக் காண் கிறோம்.

மாதிரி 75

கீழ்க் காணும் பட்டியலிலுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு,

(i) இடைநிலை, (ii) கால்மான விலக்கங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்.

கரும்பிலிருந்து கிடைக்கும் சர்க்கரையின் சதவீத எல்லைகள்	இந்தியாவிலுள்ள ஆலைகள் (1935-36)	கரும்பிலிருந்து கிடைக்கும் சர்க்கரையின் சதவீத எல்லைகள்	இந்தியாவிலுள்ள ஆலைகள் (1935-36)
8·0—8·2	2	9·4— 9·6	10
8·2—8·4	5	9·6— 9·8	7
8·4—8·6	4	9·8—10·0	6
8·6—8·8	11	10·0—10·2	3
8·8—9·0	11	10·2—10·4	1
9·0—9·2	11	10·4—10·6	1
9·2—9·4	13		
		மொத்தம்	85

(எம்.ஏ.-பஞ்சாப்.1943)

தீர்வு

முதலில் குவி அலைவெண் கண்டுபிடித்து, பின்னர் இடைநிலையைக் கணக்கிடுகிறோம்.

கரும்பிலிருந்து கிடைக்கும் சர்க்கரையின் சதவீத எல்லைகள்	அலைகளின் எண்ணிக்கை -அலைவெண்-	குவி அலைவெண்
8·0 — 8·2	2	2
8·2 — 8·4	5	7
8·4 — 8·6	4	11
8·6 — 8·8	11	22
8 8 — 9·0	11	33
9·0 — 9·2	11	44
9·2 — 9·4	13	57
9·4 — 9·6	10	67
9·6 — 9·8	7	74
9·8 — 10·0	6	80
10·0 — 10·2	3	83
10·2 — 10·4	1	84
10·4 — 10·6	1	85

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left[\frac{85+1}{2}\right]$ ஆவது

அல்லது 43 ஆவது ஆலையில் கரும்பிலிருந்து கிடைக்கும் சர்க்கரையின் சதவீத அளவு.

43 ஆவது ஆலை (9·0—9·2) என்ற பிரிவின் கீழ் வருகிறது.

ஆகவே,

$$\text{இடைநிலை } M_e = l_1 + \frac{\left[\frac{n+1}{2}\right] - m}{f} \times C$$

$$= 9{\cdot}0 + \frac{43-33}{11} \times 0{\cdot}2$$

$$= 9{\cdot}0 + \frac{2}{11}$$

$$= 9{\cdot}18\%$$

முதல் கால்மானம் $= \left(\frac{n+1}{4}\right)$ஆவது அல்லது

$\left(\frac{85+1}{4}\right)$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

= 21·5 ஆவது ஆலையில் கரும்பிலிருந்து கிடைக்கும் சர்க்கரையின் சத வீத அளவு.

(21·5)ஆவது ஆலை (8·6—8·8) என்ற பிரிவின் கீழ் வருகிறது. ஆகவே,

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 8{\cdot}6 + \frac{21{\cdot}5 - 11}{11} \times 0{\cdot}2$$

$$= 8{\cdot}6 + \frac{10{\cdot}5 \times 0{\cdot}2}{11}$$

$$= 8{\cdot}79\%$$

மூன்றாவது கால்மானம் } $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ஆவது அல்லது

$3\left(\frac{85+1}{4}\right)$ஆவது அல்லது

64·5ஆவது ஆலையிலிருந்து கிடைக்கும் சர்க்கரையின் சதவீத அளவு.

(64·5)ஆவது ஆலை (9·4—9·6) என்ற பிரிவின் கீழ் வருகிறது.

$$Q_3 = l_1 + \frac{3\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 9{\cdot}4 + \frac{64{\cdot}5-57}{10} \times 0{\cdot}2$$

$$= 9{\cdot}4 + \frac{(7{\cdot}5 \times 0{\cdot}2)}{10}$$

$$= 9{\cdot}55\%$$

காலமான விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{9{\cdot}55-8{\cdot}79}{2}$$

$$= \frac{0{\cdot}76}{2}$$

$$= 0{\cdot}38$$

மாதிரி 76

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்கு

(i) கூட்டுச் சராசரி

(ii) முதல், மூன்றாவது காலமானங்கள்

(iii) ஏழாவது, ஐந்தாவது, நாலாவது பத்துமானங்கள்

(iv) ஐந்தாவது அறுமானம்

(v) மூன்றாவது, ஏழாவது ஐந்தாவது எண்மானங்கள்

(vi) 15ஆவது, 10ஆவது, 20ஆவது, 60ஆவது, 90ஆவது நூறு மானங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்.

வருவாய்	வேலையாட்கள்	வருவாய்	வேலையாட்கள்
24	3	32	79
25	6	33	55
26	10	34	36
27	15	35	26
28	24	36	19
29	42	37	13
30	75	38	8
31	90		

தீர்வு :

வருவாய் x	வேலை யாட்கள் f	குவி அலைவெண் $c.f$	ஊகச் சராசரியி ($A=31$)லிருந்து விலக்கம் dx	பெருக்கல் fdx
24	3	3	−7	−21
25	6	9	−6	−36
26	10	19	−5	−50
27	15	34	−4	−60
28	24	58	−3	−72
29	42	100	−2	−84
30	75	175	−1	−75
31	90	265	0	0
32	79	344	1	79
33	55	399	2	110
34	36	435	3	108
35	26	461	4	104
36	19	480	5	95
37	13	493	6	78
38	8	501	7	56
	$n=501$			$\Sigma fdx = 232$

(1) கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$$= 31 + \frac{232}{501}$$

$$= 31 + 0{\cdot}46$$

$$= 31{\cdot}46 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

(ii) கால்மானங்கள் :

$$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ ஆவது அல்லது } \left(\frac{50+1}{4}\right) \text{ ஆவது}$$

அல்லது (125·5) ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 30 (தோராயமாக)

$$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ஆவது அல்லது } \left[30\ \frac{(501+1)}{4}\right]$$

ஆவது அல்லது (376·5) ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 33 (தோராயமாக)

(iii) பத்துமானங்கள் :

$$D_7 = 7\left[\left(\frac{n+1}{10}\right)\right] \text{ஆவது அல்லது} \left[7\ \frac{(501+1)}{10}\right]\text{ஆவது}$$

அல்லது (351·4) ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 33 (தோராயமாக)

$$D_5 = \left[5\left(\frac{n+1}{10}\right)\right] \text{ஆவது அல்லது} \left[5\ \frac{(501+1)}{10}\right]\text{ஆவது}$$

= அல்லது (251) ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 31 (தோராயமாக)

$$D_4 = \left[4\ \frac{(n+1)}{10}\right] \text{ஆவது அல்லது} \left[4\ \frac{(501+1)}{10}\right]$$

ஆவது அல்லது (200·8) ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 31 (தோராயமாக)

(iv) அறுமானம் :

$$H_5 = \left[5\left(\frac{n+1}{6}\right)\right] \text{ஆவது அல்லது} \left[5\ \frac{(501+1)}{6}\right]$$

ஆவது அல்லது (418·3) ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 34 (தோராயமாக)

(v) எண்மானங்கள் :

$O_3 = \left[3\,\frac{(n+1)}{8} \right]$ ஆவது அல்லது $\left[3 \times \frac{(501+1)}{8} \right]$

ஆவது அல்லது $(188{\cdot}2)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \mathbf{31}$ (தோராயமாக)

$O_7 = \left[7 \left(\frac{n+1}{8} \right) \right]$ ஆவது அல்லது $\left[7\,\frac{(501+1)}{8} \right.$

ஆவது அல்லது $(439{\cdot}2)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \mathbf{35}$ (தோராயமாக)

$O_5 = \left[5 \left(\frac{n+1}{8} \right) \right]$ ஆவது அல்லது $\left[5\,\frac{(501+1)}{8} \right]$

ஆவது அல்லது $(313{\cdot}7)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \mathbf{32}$ (தோராயமாக)

(vi) நூற்றுமானங்கள் :

$P_{15} = \left[15 \left(\frac{n+1}{100} \right) \right]$ ஆவது அல்லது $\left[15 \times \frac{(501+1)}{100} \right]$

ஆவது அல்லது $(75{\cdot}3)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \mathbf{29}$ (தோராயமாக)

$P_{10} = \left[10 \left(\frac{n+1}{100} \right) \right]$ ஆவது அல்லது $\left[10 \left(\frac{501+1}{100} \right) \right]$

ஆவது அல்லது $(50{\cdot}2)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \mathbf{28}$ (தோராயமாக)

$P_{20} = \left[20 \left(\frac{n+1}{100} \right) \right]$ ஆவது அல்லது $\left[20 \left(\frac{501+1}{100} \right) \right]$

ஆவது அல்லது $(100{\cdot}4)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \mathbf{30}$ (தோராயமாக)

$P_{40} = \left[40 \left(\frac{n+1}{100} \right) \right]$ ஆவது அல்லது $(200{\cdot}8)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \mathbf{31}$ (தோராயமாக)

$$P_{60} = \left[60\left(\frac{n+1}{100}\right)\right]\text{ஆவது அல்லது } (301\cdot2)\text{ஆவது உறுப்பின் அளவு}$$

$$= 32 \text{ (தோராயமாக)}$$

$$P_{90} = \left[90\left(\frac{n+1}{100}\right)\right]\text{ஆவது அல்லது } (451\cdot8)\text{ஆவது உறுப்பின் அளவு}$$

$$= 35 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 77

கீழ்க் காணும் பட்டியல் இந்தியாவின் ஒரு பகுதியிலுள்ள ஆண், பெண் மக்கள் தொகையின் அலைவெண் பரவலைத் தருகிறது. இடைநிலையையும் கால்மான வயதுகளையும் காண்.

வயதுப் பிரிவு	ஆண்	பெண்
0— 9	2756	2787
10—19	2124	2032
20 –29	1677	1724
30—39	1481	1485
40—49	1021	1022
50—59	610	579
60—69	245	269
70—79	67	78
80—89	16	20
90—99	3	4
மொத்தம்	10,000	10,000

(ஐ. சி. எஸ். —1938)

தீர்வு :

இடைவெளி விட்ட பிரிவுகளை இடைவெளி அற்ற பிரிவுகளாக மாற்றி இடைநிலை கால்மானங்கள் காணவேண்டும்,

பிரிவு	ஆண்		பெண்	
	அலை வெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$	அலை வெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$
0— 9·5	2756	2756	2787	2787
9·5—19·5	2124	4880	2032	4819
19·5—29·5	1677	6557	1728	6543
29·5—39·5	1481	8038	1485	8028
39·5—49·5	1021	9059	1022	9050
49·5—59·5	610	9669	579	9629
59·5—69·5	245	9914	269	9898
69·5—79·5	67	9981	78	9976
79·5—89·5	16	9997	20	9996
89·5—99·5	3	10,000	4	10,000
	10,000		10,000	10,000

ஆண்கள் :

இடைநிலை $M_e = l_1 + \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$

$= 19{\cdot}5 + \dfrac{5000{\cdot}5 - 4880}{1677} \times 10$

$= 20{\cdot}22$ ஆண்டுகள்

முதல் கால்மானம் $Q_1 = l_1 + \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{4}\right) - m}{l} \times C$

$= 0 + \dfrac{2500{\cdot}25 - 0}{2756} \times 10$

$= 9{\cdot}01$ ஆண்டுகள்

$$Q_3 = l_1 + \frac{3\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{l} \times C$$

$$= 29{\cdot}5 + \frac{7500{\cdot}75 - 6557}{1481} \times 10$$

$$= \mathbf{35{\cdot}87} \text{ ஆண்டுகள்}$$

பெண்கள் :

இடைநிலை $M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$

$$= 19{\cdot}5 + \frac{5000{\cdot}5 - 4819}{1724} \times 10$$

$$\mathbf{20{\cdot}55} \text{ ஆண்டுகள்}$$

கால்மானங்கள் $Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$

$$= 0 + \frac{2500{\cdot}25 - 0}{2787} \times 10$$

$$= \mathbf{8{\cdot}9} \text{ ஆண்டுகள்}$$

$$Q_3 = l_1 + \frac{3\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 29{\cdot}5 + \frac{7500{\cdot}75 - 6543}{1485} \times 10$$

$$= \mathbf{35{\cdot}47} \text{ ஆண்டுகள்}$$

மாதிரி 78

(i) இடைநிலை

(ii) கால்மானங்கள்

(iii) ஆறுவது பத்துமானம்

(iv) எழுபதாவது நூற்றுமானம்

ஆகியவற்றைக் கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்குக் கணக்கிடுக.

80	70	60	50	40	30	20	10	-க்குக் குறைவான மதிப்பெண்கள்
100	90	80	60	32	20	13	5	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை

(பி.காம் — இராஜஸ்தான் —1951)

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலைச் சாதாரண அலைவெண் பரவலாக மாற்றவேண்டும். பின், தேவைப்பட்டவைகளைக் கணக்கிடலாம்.

இடைவெளிப் பிரிவு	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் $c.f.$
0—10	5 — 0 = 5	5
10—20	13 — 5 = 8	13
20—30	20 — 1 ÷ 37	20
30—40	32 —20 = 12	32
40—50	60 —32 = 28	60
50—60	80 —60 = 20	80
60—70	90 —80 = 10	90
70—80	100 —90 = 10	100

இடைநிலை :

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{100+1}{2}\right)$ ஆவது

அல்லது (505)ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

(250·5)ஆவது மதிப்பு (40—50) என்ற பிரிவு இடைவெளியில் விழுகிறது.

$$\text{ஆகவே, } M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 40 + \frac{50{\cdot}5 - 32}{28} \times 10$$

$$= \mathbf{46{\cdot}6} \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

(ii) கால்மானங்கள் :

முதல் கால்மானம் $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{100+1}{2}\right)$

ஆவது அல்லது (25·25) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண்.

(252·5) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண் (30—40) என்ற இடை வெளிப் பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே,
$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 30 + \frac{25{\cdot}25 - 20}{12} \times 10$$

$$= 34{\cdot}3 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

மூன்றுவது கால்மானம் $Q_3 = \left[3\left(\frac{n+1}{4}\right) \right]$

அல்லது $\left[3\left(\frac{100+1}{4}\right) \right]$ ஆவது

அல்லது (75·75) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பாகும்.

(75·75) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண் (50—60) என்ற இடை வெளிப் பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே, $Q_3 = l_1 + \frac{3\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$

$$= 50 + \frac{(75{\cdot}75 - 60)}{20} \times 10$$

$$= 57{\cdot}875 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

(iii) பத்துமானம் :

ஆறுவது பத்துமானம் $D_6 = \left[6\left(\frac{n+1}{10}\right) \right]$ ஆவது அல்லது

$\left[6\left(\frac{100+1}{10}\right) \right]$ ஆவது அல்லது (60·6) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண் ஆகும்.

(60·6) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண் (50—60) என்ற இடைவெளிப் பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே,
$$D_6 = l_1 + \frac{6\left(\frac{n+1}{10}\right) - m}{f} \times C$$
$$= 50 + \frac{60{\cdot}6-60}{20} \times 10$$
$$= 50{\cdot}3 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

(iv) நூற்றுமானம் :

70 ஆவது நூற்றுமானம் $= \left[70 \times \frac{(n+1)}{100} \right]$ ஆவது அல்லது

$\left[70\,\frac{(100+1)}{100} \right]$ ஆவது அல்லது (70·70) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பாகும்.

(70·70) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு (50—60) என்ற இடைவெளிப் பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே,
$$P_{70} = l_1 + \frac{70\left(\frac{n+1}{100}\right) - m}{f} \times C$$
$$= 50 + \frac{(70{\cdot}70-60)}{20} \times 10$$
$$= 55{\cdot}35 \text{ மதிப்பெண்கள்.}$$

மாதிரி 79

கீழ்க் காணும் பட்டியலில் உள்ள அலைவெண் பரவலுக்கு இடைநிலை, கால்மானங்கள் ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

வருமானம்	ஆட்களின் எண்ணிக்கை	வருமானம்	ஆட்களின் எண்ணிக்கை
ரூ. 30-க்குக் கீழ்	69	ரூ. 60-க்கு மேல் ரூ. 70-க்குக் கீழ்	58
ரூ. 30-க்கு மேல் ரூ. 40-க்குக் கீழ்	167	ரூ. 70-க்கு மேல் 80-க்குக் கீழ்	27
ரூ. 40-க்கு மேல் ரூ. 50-க்குக் கீழ்	207	ரூ. 80-க்கு மேல்	10
ரூ. 50-க்கு மேல் ரூ. 60-க்குக் கீழ்	65		
		மொத்தம்	603

(பி. காம்.—பம்பாய்—1942)

தீர்வு :

குவி அலைவெண் பரவல் கணக்கிட்டு இடைநிலை, கால்மானங்கள் ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுகிறோம்.

வருமானம்	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$
ரூ. 30-க்குக் கீழ்	69	69
ரூ. 30—ரூ. 40	167	236
ரூ. 40—ரூ. 50	207	443
ரூ. 50—ரூ. 60	65	508
ரூ. 60—ரூ. 70	58	566
ரூ. 70—ரூ. 80	27	593
ரூ. 80-க்கு மேல்	10	603
	$n = 603$	

இடைநிலை : $$M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 40 + \frac{302+236}{207} \times 10$$

$$= 43{\cdot}2 \quad (\text{தோராயமாக})$$

காலமானங்கள் :

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{603+1}{4}\right)$ ஆவது அல்லது (151) ஆவது ஆளின் வருமானம்.

(151) ஆவது ஆளின் வருமானம் (30—40) என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே, $$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 30 + \frac{(151-69)}{167} \times 10$$

$$= 30 + \frac{82 \times 10}{167}$$

$$= 34{\cdot}9$$

ஆதலால் முதல் காலமான வருமானம் = ரூ. 34·9 (தோராயமாக)

மூன்றாவது காலமானம் $Q_3 = \left[3\left(\frac{n+1}{4}\right)\right]$ ஆவது அல்லது $\left[3\left(\frac{603+1}{4}\right)\right]$ ஆவது அல்லது (453) ஆவது ஆளின் வருமானம்.
453 ஆவது ஆளின் வருமானம் (50—60) என்ற பிரிவின் கீழ் வருகிறது.

ஆகவே, $$Q_3 = l_1 + \frac{\left[3\left(\frac{n+1}{4}\right)\right] - m}{f} \times C$$

$$= 50 + \frac{453-443}{65} \times 10$$

$$= 50 + \frac{10 \times 10}{65}$$

$$= 51{\cdot}5 \quad (\text{தோராயமாக})$$

ஆதலால் மூன்றாவது காலமான வருமானம் = ரூ. 51·5 (தோராயமாக)

மாதிரி 80

கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்கு இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

கூலி (ரூபாயில்)	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை
100-க்கு மேல்	5
90-க்கு மேல்	17
80-க்கு மேல்	37
70-க்கு மேல்	43
60-க்கு மேல்	49
50-க்கு மேல்	49
40-க்கு மேல்	51

தீர்வு :

மேற்கண்ட பட்டியலைக் குவி அலைவெண் பரவலாக எழுதி இடைநிலையைக் காண்கிறோம்.

கூலி (ரூபாயில்)	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$
100-க்கு மேல்	5	5
90 — 100	12	17
80 — 90	20	37
70 — 80	6	43
60 — 70	6	49
50 — 60	0	49
40 — 50	2	51
	$n = 51$	

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{61+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது 26ஆவது வேலையாள் வாங்கும் கூலி. 26 ஆவது வேலையாள் வாங்கும் கூலி (80—90) என்ற கூலிப் பிரிவில் விழுகிறது.

இங்கு ஏறுவரிசையில் எழுதுவதற்குப் பதிலாக இறங்கு வரிசையில் உறுப்புகளை எழுதியுள்ளோம். ஆகவே, கீழ்க் கண்டவாறு சூத்திரத்தை மாற்றி எழுதி இடைநிலையைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$$\text{இடைநிலை } M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 80 + \frac{[26-(51-37)]}{20} \times 10$$

$$= 80 + \frac{12 \times 10}{20}$$

= ரூ. 86

முகடு
(Mode)

மாதிரி 81

கீழ்க் காணும் எண்களின் முகட்டு எண்ணைக் கணக்கிடு.

32, 35, 32, 33, 35, 35, 36, 34 35, 33, 35, 32, 35, 37, 31.

தீர்வு :

கொடுத்த எண்களை ஏறுவரிசை மதிப்பில் எழுதினால்

31, 32, 32, 32, 33, 33, 34, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 36, 37.

ஆகும்.

மேற்கண்ட வரிசையில் '35' என்ற எண் 6 தடவை வருகிறது. வேறு எந்த எண்ணும் 6 முறை வரவில்லை. ஆகவே, இங்கு முகட்டு எண் 35 எனக் கொள்கின்றோம்.

மாதிரி 82

கீழ்க் காணும் எண்களுக்கு முகட்டு எண்ணைக் கணக்கிடுக.

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20. (எம். காம்.—ஆக்ரா.—1954)

தீர்வு :

ஏறுவரிசை மதிப்பில் மேற்கண்ட எண்களை எழுதினால்

15, 20, 23, 23, 25, 25, 25, 27, 40 ஆகும்.

இங்கு அதிகத் தடவை வரும் எண் '25' ஆகும். அதாவது, மற்ற எண்களை விட '25' ஒன்றுதான் கூடிய 3 தடவை வருகிறது. ஆகவே, இங்கு முகட்டு எண் '25' ஆகும்.

மாதிரி 83

கீழ்க் காணும் வரிசையில் முகட்டு அளவைக் கணக்கிடுக.

உறுப்பின் அளவு	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
அலைவெண்	3	8	10	12	16	14	10	8	17	5	4	1

(*பி. காம்.—நாக்பூர்*—1945)

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட பரவலில் உறுப்பு அளவு 10 *என்பதன் அலைவெண் அதிகமாக வருகிறது. அதே நேரத்தில்,* 9,11 *என்ற பக்கத்து உறுப்பு அளவுகளின் அலைவெண்கள் முறையே* 8,5 *என்பன உறுப்பு அளவு* '10' *ஐ முகட்டு அளவாக இருப்பதற்கு அதிக உதவி செய்யவில்லை. இங்கு* '6' *என்ற உறுப்பு அளவின் அலைவெண்* 16 *ஐ முகட்டு அளவை அலைவெண்ணாகக் கொள்வதற்கு அதன் பக்கத்து அலைவெண்கள் மிகவும் உதவி செய்கின்றன. இச் சிக்கலில் நல்ல தீர்வு கண்டு உண்மையான முகட்டு அளவைக் கணக்கிடத் தொகுதிசேர் முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.*

தொகுதிசேர் முறையைப் பயன்படுத்தி முகடு காணல்

தொகுதிசேர் பட்டியல்

உறுப்பு அளவு	அலைவெண் I	II	III	IV	V	VI
2	3	11		21		
3	8		18		30	
4	10	22				38
5	12		28	42		
6	16	30			40	
7	14		24			32
8	10	18		35		
9	8		25		30	
10	17	22				26
11	5		9	10		
12	4	5				
13	1					

மேற்கண்ட பட்டியல் கீழ்க் காணும் முறைப்படி அமைக்கப் பட்டது.

முதல் அலைவெண்ணிலிருந்து ஆரம்பித்து *I* ஆவது பத்தியில் கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண்கள் இரண்டு இரண்டாகக் கூட்டப் பட்டு *II* ஆம் பத்தியில் எழுதப்பட்டுள்ளது. முதல் அலை வெண்ணை விட்டு விட்டு *I* ஆவது பத்தியிலுள்ள மீத அலை வெண்களை இரண்டு இரண்டாகக் கூட்டி *III*ஆம் பத்தியில் எழுதப் பட்டுள்ளது. முதல் அலைவெண்ணிலிருந்து ஆரம்பித்து, *I* ஆம் பத்தியில் கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண்களை மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி *IV* ஆவது பத்தியில் எழுதப்பட்டுள்ளது. அதேபோல், முதல் அலைவெண்ணை விட்டுவிட்டு, *I* ஆவது பத்தியிலுள்ள மற்றைய அலைவெண்களை மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி *V* ஆவது பத்தியில் எழுதப் பட்டுள்ளது பின் இரண்டு முதல் அலைவெண்களை *I* ஆம் பத்தியில் விட்டுவிட்டு, மீத அலைவெண்கள், மூன்று மூன்றாகக் கூட்டி *VI* ஆம் பத்தியில் எழுதப்பட்டுள்ளது. இவைகள் யாவற் றிலும் அதிக அலைவெண் கூடுதல் தடித்த எழுத்துக்களில் எழுதப் பட்டுள்ளது.

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்திகள்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட உறுப்புகளின் அளவு
I	10
II	6, 7
III	5, 6,
IV	5, 6, 7
V	6, 7, 8
VI	4, 5, 6

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலம் '6' என்ற உறுப்பு அளவு அதிக எண்ணிக்கையில் (5 தடவை) வருகிறது எனத் தெரி கிறது.

ஆகவே, இங்கு '6' என்பதே முகட்டு அளவாகும்.

மாதிரி 84

கீழ்க் காணும் வரிசைக்கு முகட்டைக் கணக்கிடுக.

அளவு	அலைவெண்	அளவு	அலைவெண்
5	48	13	52
6	52	14	41
7	56	15	57
8	60	16	63
9	63	17	52
10	57	18	48
11	55	19	40
12	50		

(பி. காம்.—அலகாபாத்—1943)

தீர்வு :

தொகுதிசேர் முறையில் முகடு காணல் :

தொகுதிசேர் பட்டியல்

அளவு	அலைவெண் I	II	III	VI	V	VI
5	48	100		156		
6	52		108		168	
7	56	116				**179**
8	60		**123**	**180**		
9	**63**	**120**			175	
10	57		112			162
11	55	105		157		
12	50		102		143	
13	52	93				150
14	41		98	161		
15	57	**120**			172	
16	**63**		115			163
17	52	100		140		
18	48		88			
19	40					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்திகள்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட உறுப்புகளின் அளவு
I	9, 16.
II	9, 10, 15, 16
III	8, 9
IV	8, 9, 10
V	9, 10, 11
VI	7, 8, 9

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வு பட்டியலின் மூலம் '9' என்ற உறுப்பு அளவு அதிக எண்ணிக்கையில் (6 தடவைகள்) வருகிறது.

ஆகவே, இங்கு '9' என்பதே முகட்டு அளவாகும்.

மாதிரி 85

கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்கு முகட்டைக் கணக்கிடுக.

உறுப்பு அளவு	அலை வெண்	உறுப்பு அளவு	அலை வெண்
4	2	9	14
5	5	10	14
6	8	11	15
7	9	12	11
8	12	13	13

தீர்வு :

தொகுதி சேர் முறைப்படி முகடு கணக்கிடல் :

தொகுதிசேர் பட்டியல்

உறுப்பு அளவு	அலைவெண் I	II	III	IV	V	VI
4	2	7		15		
5	5		13		22	
6	8	17				29
7	9		21	35		
8	12	26			40	
9	14		28			43
10	14	29		40		
11	15		26		39	
12	11	24				
13	13					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்திகள்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட உறுப்புகளின் அளவு
I	11
II	10, 11
III	9, 10
IV	10, 11, 12
V	8, 9, 10
VI	9, 10, 11

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலம் '10' என்ற உறுப்பு அளவு அதிக எண்ணிக்கையில் (5 தடவை) வருகிறது எனத் தெரிகிறது.

ஆகவே, இங்கு '10' என்பதே முகட்டு அளவாகும்.

மாதிரி 86

கீழ்க் கண்ட வரிசைக்கு முகடு காண்.

உயரம்	அலைவெண்	உயரம்	அலை வெண்
5′ 6″	1	5′ 11″	1
5′ 7″	2	6′ 0″	2
5′ 8″	4	6′ 1″	1
5′ 9″	3	6′ 3″	1
5′ 10″	2	6′ 3″	1

(எம். ஏ-ஆக்ரா-1937)

தீர்வு :

தொகுதி சேர் முறையில் முகடு கணக்கிடல் :

தொகுதிசேர் பட்டியல்

உயரம் (அங்குலத்தில்)	அலைவெண்					
	I	II	III	IV	V	VI
66	1	3 (66–67)		7 (66–68)		
67	2		6 (67–68)		9 (67–69)	9 (67–69)
68	4	7 (68–69)				
69	3		5 (69–70)	6 (69–71)		
70	2	3 (70–71)			5 (70–72)	
71	1		3 (71–72)			
72	2	3 (72–73)		4 (72–74)		4 (72–74)
73	1		2 (73–74)		4 (73–75)	
74	1	2 (74–75)				
75	1					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்திகள்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட உறுப்புகளின் அளவு
I	68
II	68, 69
III	67, 68
Vi	66, 67, 68
V	67, 68, 69
IV	68, 69, 70,

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலம் '68' என்ற உறுப்பு அளவு அதிக எண்ணிக்கையில் (5 தடவைகள்) வருகிறது.

ஆகவே, இங்கு '68' அல்லது 5/ 8// என்னும் உயர அளவே முகட்டு அளவாகும்.

மாதிரி 87

கீழ்க் காணும் வரிசையில் முகட்டு அளவைத் தொகுதி சேர் முறையில் காண்.

உறுப்பின் அளவு	1	2	3	4	5	6	7	8	9
அலைவெண்	14	12	15	16	15	16	14	14	15

(சென்னை—பல்கலை.)

தீர்வு :

தொகுதிசேர் முறையில் முகடு காணல்.

தொகுதிசேர் பட்டியல்

உறுப்புகளின் அளவு	அலைவெண்					
	I	II	III	IV	V	VI
1	14	26				
2	12		27	41		
3	15	31			43	
4	16		31			46
5	15	31		47		
6	16		30		45	
7	14	28				44
8	14		29	43		
9	15					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்திகள்	அதிர அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட உறுப்புகளின் அளவு
I	4, 6
II	3, 4, 5, 6
III	4, 5
IV	4, 5, 6
V	5, 6, 7
VI	3, 4, 5

முதல் 1-வது பத்தியிலுள்ள அலைவெண்களை விட்டுவிட்டு மீதமுள்ள பத்திகளில் பகுப்பாய்வின் மூலம் '5' என்ற உறுப்பளவு அதிக எண்ணிக்கையில் (5 தடவை) வருகிறது. ஆகவே, இங்கு '5' என்பதே முகட்டு அளவாகும். இது பரவலில் பார்த்த அளவில் கண்டறிய இயலாமல் இருப்பதைக் கவனிக்கலாம்.

மாதிரி 38

தொகுதிசேர் முறையின்படி கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்கு முகட்டு அளவைக் கணக்கிடுக.

அளவு	அலைவெண்	அளவு	அலைவெண்
1	52	8	52
2	56	9	41
3	60	10	57
4	63	11	63
5	57	12	52
6	55	13	48
7	50		

(அண்ணாமலை-பல்கலை)

தீர்வு :

அளவு	அலைவெண்					
	I	II	III	IV	V	VI
1	52	108				
2	56		116	168		
3	60	**123**			**179**	
4	**63**		**120**			**180**
5	57	112		**175**		
6	55		105		162	
7	50	102				157
8	52		93	143		
9	41	98			150	
10	57		**120**			161
11	**63**	115		172		
12	52		100		163	
13	48					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்திகள்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட உறுப்புகளின் அளவு												
I				4							11		
II			3	4									
III				4	5								
IV				4	5	6							
V		2	3	4									
VI			3	4	5								

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலம் '4' என்ற அளவு அதிக எண்ணிக்கையில் (6 தடவை) வருகிறது. ஆகவே இங்கு அளவு '4' என்பதே முகட்டு அளவாகும்.

மாதிரி 89

கீழ்க் காணும் பட்டியல் ஒரு தொழிற் சாலையின் ஆயிரம் கூலியாட்களின் தினக் கூலிப் பரவலைத் தருகிறது. முகட்டுக் கூலியைக் கணக்கிடுக.

தினக்கூலி (காசுகளில்)	கூலியாட்கள் எண்ணிக்கை	தினக்கூலி (காசுகளில்)	கூலியாட்கள் எண்ணிக்கை
20	3	140	204
40	13	160	139
60	43	180	69
80	102	200	25
100	175	220	6
120	220	240	1
		மொத்தம்	1000

(எம். ஏ.—அலகாபாத்)

தீர்வு :

தொகுதிசேர் முறையில் முகடு காணல் :

தொகுதிசேர் பட்டியல்

தினக் கூலி (காசுகளில்)	அலைவெண்					
	I	II	III	IV	V	VI
20	3	16		59		
40	13		56		158	
60	43	145				320
80	102		277	497		
100	175	395			599	
120	**220**		**424**			**563**
140	204	343		412		
160	139		208		233	
180	69	94				100
200	25		31	32		
220	6	7				
240	1					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்திகள்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட உறுப்புகளின் கூலிகள் (காசுகளில்)
I	120
II	100, 120
III	120, 140
IV	80, 100, 120
V	100, 120, 140
VI	120, 140, 160

முன்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியல் மூலம் '120' காசுகள் என்ற தினக்கூலி அதிக எண்ணிக்கையில் (6 தடவை) வருகிறது. ஆகவே, இங்கு 120 காசுகள் அல்லது 1 ரூபாய் 20 காசுகள் என்னும் தினக் கூலியே முகட்டு அளவாகும்.

மாதிரி 90

கீழ்க்காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு முகடு காண்.

பிரிவு	0—7	7—14	14—21	21—28	28—35	35—42	42—49
அலை வெண்	19	25	36	72	51	43	28

தீர்வு :

இங்கு அதிக அலைவெண் = 72 ஆகும்.

இந்த அலைவெண் (21—28) என்ற பிரிவின்கீழ் வருவதாகும்.

முதல் சூத்திரம் :

$$\text{முகடு காணும் சூத்திரம் } M_0 = l_1 + \frac{f_2}{f_1 + f_2} \times C$$

ஆகவே,

$$M_0 = 21 + \frac{51}{36+51} \times 7$$

$$= 25{\cdot}103$$

இங்கு, l_1 = முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை = 21

f_1 = முகட்டுப் பிரிவிற்கு முந்தைய பிரிவின் அலைவெண் = 36

f_2 = முகட்டுப் பிரிவிற்குப் பிந்தைய பிரிவின் அலைவெண் = 51

C = இடைவெளிப் பிரிவு = 7 ஆகும்.

பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் இரண்டாவது சூத்திரம் :

$$M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$$

இங்கு, l_1 = முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை

f_m = முகட்டுப் பிரிவின் அலைவெண்

f_1 = முகட்டுப் பிரிவிற்கு முந்தைய பிரிவின் அலைவெண்

f_2 = முகட்டுப் பிரிவிற்குப் பிந்தைய பிரிவின் அலைவெண்

C = பிரிவு இடைவெளி.

ஆகவே, முகடு $M_o = 21 + \frac{72-36}{144-36-51} \times 7$

$= 21 + 4 \cdot 4$

$= 25 \cdot 4$

மாதிரி 91

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்களுக்கு முகட்டுச் சம்பளத்தைக் காண்.

வாரச் சம்பளம்				சம்பளம் வாங்கு பவர் எண்ணிக்கை
S. d.		S. d.		
12—6	- லிருந்து	17—6	வரை	4
17—6	,,	22—6	,,	44
22—6	,,	27—6	,,	38
27—6	,,	32—6	,,	28
32—6	,,	37—6	,,	6
37—6	,,	42—6	,,	8
42—6	,,	47—6	,,	12
47—6	,,	52—6	,,	2
52—6	,,	57—6	,,	2

(பி.காம்—ராஜஸ்தான்—1949)

தீர்வு :

இங்கு உயர் அளவு அலைவெண் 44 ஆகும்.

அலைவெண் 44-ன் முகட்டுப் பிரிவு $17\frac{1}{2}$—$22\frac{1}{2}$ என்பதாகும்.

இங்கு, $l_1 = 17\frac{1}{2} = \frac{35}{2}$ s.

$l_2 = 22\frac{1}{2} = \frac{45}{2}$ s.

$f_m = 44$

$f_1 = 4$

$f_2 = 38$

$C = 5$ ஆகும்.

ஆகவே, முகடு $M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$

$$= \frac{35}{2} + \frac{(44-4)}{(2\times 44)-4-38} \times 5$$

$$= \frac{35}{2} + \frac{(40\times 5)}{46}$$

$$= s.\ 21\frac{39}{46}$$

ஆகையால் முகடு $= s.\ \mathbf{21\frac{39}{46}}$

மாதிரி 92

கீழ்க்காணும் பட்டியலின் புள்ளி விவரங்களுக்கு முகடு காண்.

மதிப்பெண்கள்	1—5	6—10	11—15	16—20	21—25
மாணவர் எண்ணிக்கை	7	10	16	32	24
மதிப்பெண்கள்	26—30	31—35	36—40	41—45	—
மாணவர் எண்ணிக்கை	18	10	5	1	—

(பி.காம்.—அண்ணுமலே—1963)

தீர்வு :

இங்கு உயர் அளவு அலைவெண் 32 ஆகும். அலைவெண் 32-ன் முகட்டுப் பிரிவு 16—20 என்பதாகும்.

இங்கு, $l_1 = 15\cdot5$; $l_2 = 20\cdot5$

$f_m = 32$; $f_1 = 16$

$f_2 = 24$; $C = 4$

ஆகவே, முகடு $M_0 = l_1 + \dfrac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$

$$= 15\cdot5 + \frac{32-16}{64-16-24} \times 5$$

$$= 15\cdot5 + \frac{(16\times5)}{24} = 18\cdot83$$

$= \mathbf{18\cdot83}$ மதிப்பெண்கள் (தோராயமாக)

மாதிரி 93

கீழ்க்காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு முகடு காண்.

பிரிவு	20—	21—	22—	23—	24—	25—	26—	27—	28—29
அலை வெண்	8	10	11	16	20	25	16	9	6

(எம்.ஏ.—அண்ணாமலை)

தீர்வு :

இங்கு உயர் அளவு அலைவெண் 25 ஆகும். அலைவெண் 25-ன் முகட்டுப் பிரிவு (25—26) என்பதாகும்.

இங்கு $l_1 = 25$

$f_m = 25$

$f_1 = 20$

$f_2 = 16$

$C = 1$

ஆகவே,

$$\text{முகடு } M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$$

$$= 25 + \frac{25-20}{50-20-16} \times 1$$

$$= 25 + \frac{(5\times1)}{14}$$

$$= 25 + 0{\cdot}35$$

$$= \mathbf{25{\cdot}35}$$ (தோராயமாக)

மாதிரி 94

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு முகடு காண்.

மதிப்பெண்கள்	2—4	4—6	6—8	8—10
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	20	40	20	10

தீர்வு :

I. முகடு காணும் முதல் சூத்திரம் :

$$\text{முகடு } M_0 = l_1 + \frac{f_2}{f_1+f_2} \times C$$

$$= 4 + \frac{30}{20+30} \times 2$$

$$= \mathbf{5{\cdot}4}$$ மதிப்பெண்கள் (தோராயமாக)

மேற்கண்ட பரவலுக்கு,

$$\text{இடைநிலை } M_e = \frac{11}{2}$$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{28}{5}$$

II. முகடு காணும் இரண்டாவது சூத்திரம் :

முகடு M_0 = 3 இடைநிலை — 2 கூட்டுச் சராசரி

$$= (3\times 11\tfrac{1}{2}) - \left(2\times \frac{28}{5}\right)$$

$$= \frac{33}{2} - \frac{56}{5}$$

$$= \mathbf{5{\cdot}3}$$ மதிப்பெண்கள் (தோராயமாக)

III. பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் மூன்றாவது சூத்திரம் :

முகடு $M_o = l_1 + \dfrac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$

$= 4 + \dfrac{40-20}{80-20-30} \times 2$

$= 4 + \dfrac{20}{30} \times 2$

$= 4 + 1{\cdot}33$

$=$ **5.33** மதிப்பெண்கள் (தோராயமாக)

மாதிரி 95

கீழ்க் காணும் பட்டியல் 30 பி. காம். மாணவர்கள் வகுப்புத் தேர்வில் புள்ளியியல் பாடத்தில் வாங்கிய மதிப்பெண்களைத் தருகிறது.

(i) முகடு, (ii) இடைநிலை, (iii) கால்மானங்கள் ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

பதிவு எண்	மதிப் பெண்கள்	பதிவு எண்	மதிப் பெண்கள்	பதிவு எண்	மதிப் பெண்கள்
1	33	11	40	21	26
2	32	12	17	22	33
3	55	13	44	23	44
4	47	14	48	24	48
5	21	15	62	25	52
6	50	16	24	26	38
7	27	17	33	27	58
8	12	18	42	28	37
9	68	19	38	29	38
10	49	20	45	30	35

(பி.காம்.—அலகாபாத்—1938)

தீர்வு :

(i) தொகுதிசேர் முறையில் முகடு காணல் :

தொகுதிசேர் பட்டியல்

பதிவு எண்	அலைவெண்					
	I	II	III	IV	V	VI
1	33	65				
2	32		87	120		
3	55	102			134	
4	47		68			123
5	21	71		118		
6	50		77		98	
7	27	39				89
8	12		80	107		
9	**68**	**117**			129	
10	49		89			**157**
11	40	57		106		
12	17		61		101	
13	44	92				109
14	48		**110**	**154**		
15	62	86			134	
16	24		57			119
17	33	75		99		
18	42		80		113	
19	38	83				127
20	45		71	109		
21	26	59			104	
22	33		77			103
23	44	92		125		
24	48		100		**144**	
25	52	82				130
26	30		88	140		
27	58	95			**125**	
28	37		75			133
29	38	73		110		
30	35					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்தி எண்கள்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட உறுப்புகளின் பதிவு எண்கள்
I	9
II	9, 10
III	14, 15
IV	13, 14, 15
V	23, 24, 25
VI	9, 10, 11

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலம் பதிவு எண் '9' என்பதே அதிக எண்ணிக்கையில் (3 தடவை) வருகிறது. ஆகவே, இங்கு '9' என்பதே முகட்டுப் பதிவு எண் ஆகும்.

(ii) இடைநிலை காணல் :

வரிசை எண்	மதிப்பெண்கள்	வரிசை எண்	மதிப்பெண்கள்	வரிசை எண்	மதிப்பெண்கள்
1	12	11	33	21	47
2	17	12	35	22	48
3	21	13	37	23	48
4	24	14	38	24	49
5	26	15	38	25	50
6	27	16	40	26	52
7	30	17	42	27	55
8	32	18	44	28	58
9	33	19	44	29	62
10	33	20	45	30	68

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{30+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 15{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \dfrac{\text{15 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண் + 16 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண்}}{2}$

$= \dfrac{38+40}{2}$

= **39** மதிப்பெண்கள்

(iii) கால்மானங்கள் :

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{30+1}{4}\right)$ ஆவது அல்லது (7·75) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

= 7 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண் + 0·75 (8ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண்—7 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண்)

$= 30+0{\cdot}75\ (32-30)$

$= 30+(0{\cdot}75 \times 2)$

$= 30+1{\cdot}5$

= **31·5** மதிப்பெண்கள்

$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது அல்லது $\left[3\left(\frac{30+1}{4}\right)\right]$ ஆவது அல்லது (23·25) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண்ணுகும்.

= 23 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண் + 0·25 (24 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண்—23 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பெண்)

$= 33+0{\cdot}25\ (49-48)$

= **33·25** மதிப்பெண்கள்.

மாதிரி 96

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு முகடு காண்.

உறுப்பின் அளவு	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25
அலைவெண்	20	24	32	28	20

உறுப்பின் அளவு	25—30	30—35	35—40	40—45
அலைவெண்	16	37	10	8

(பி.காம். — சென்னை)

தீர்வு :

தொகுதிசேர் முறையில் முகட்டுப் பிரிவைக் கணக்கிடல் :

தொகுதிசேர் பட்டியல்

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்					
	I	II	III	IV	V	VI
0— 5	20	44		**76**		
5—10	24		**56**		**84**	
10—15	32	**60**				**80**
15—20	28		48	64		
20—25	20	36			73	
25—30	16		53			63
30—35	**37**	47		55		
35—40	10		18			
40—45	8					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்திகள்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட பிரிவுகள்					
I						(30—35)
II			(10—15)	(15—20)		
III		(5—10)	(10—15)			
IV	(0—5)	(5—10)	(10—15)			
V		(5—10)	(10—15)	(15—20)		
VI			(10—15)	(15—20)	(20—25)	
	1	3	5	3	1	1

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலம் பிரிவு (10—15) என்பதே அதிக எண்ணிக்கையில் (5 தடவைகள்) வருகிறது எனத் தெரிகிறது.

ஆகவே, இங்கு (10—15) என்பதே முகட்டுப் பிரிவாகும்.

$$\text{முகடு } M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$$

$$= 10 + \frac{32-24}{64-24-28} \times 5$$

$$= 10 + \frac{8 \times 5}{12}$$

$$= 10 + 3{\cdot}33$$

$$= 13{\cdot}33 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 97

(i) கீழ்க்காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு முகடு காண்.

வயது	20—25	25—30	30—35	35—40
அலை வெண்	50	70	80	180
வயது	40—45	45—50	50—55	55—60
அலைவெண்	150	120	70	50

(ii) ஒரு சுமாரான கோட்டமுடைய வரிசையின் முகடு, கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 16, 20·2 அங்குலங்களாக இருந்தால் அவ்வரிசையின் மிகவும் பொருத்தமான இடை நிலையைக் காண்.

(பி.காம்.—டெல்லி—1960)

தீர்வு :

(i) தொகுதிசேர் முறையில் முகட்டுப் பிரிவைக் கணக்கிடல் :

தொகுதிசேர் பட்டியல்

பிரிவு இடை வெளி	அலைவெண் I	II	III	IV	V	VI
20—25	50	} 120 (20—30)				
25—30	70		} 150 (25—35)	} 200 (20—35)		
30—35	80	} 260 (30—40)			} 330 (25—40)	
35—40	180		} **330** (35—45)			} **410** (30—45)
40—45	150	} **270** (40—50)		} **450** (35—50)		
45—50	120		} 190 (45—55)		} **340** (40—55)	
50—55	70	} 120 (50—60)				} 240 (45—60)
55—60	50					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்தி எண்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட பிரிவுகள்				
I		35—40			
II			40—45	45—50	
III		35—40	40—45		
IV		35—40	40—45	45—50	
V			40—45	45—50	50—55
VI	30—35	35—40	40—45		
	1	4	5	3	1

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலம் பிரிவு '40—45' என்பதே அதிக எண்ணிக்கையில் (5 முறை) வருகிறது. ஆகவே இங்கு '40—45' என்பதே முகட்டுப் பிரிவாகும்.

ஆகவே, முகட்டுப் பிரிவு = **'40—45'**

முதல் சூத்திரம் :

$$\text{முகடு } M_0 = l_1 + \frac{f_2}{f_1+f_2} \times C$$

$$= 40 + \frac{120}{180+120} \times 5$$

$$= 40 + \frac{120 \times 5}{300}$$

= 42 ஆண்டுகள்

இரண்டாவது சூத்திரம் :

$$\text{முகடு } M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$$

$$= 40 + \frac{150-80}{300-180-120} \times 5$$

$$= 40 + \frac{30 \times 5}{0}$$

இங்கு, $\frac{30 \times 5}{0}$ என்பது, '0' ஆல் வகுப்பது கூடாது என்பதால் முதல் சூத்திரத்தின் மூலம் முன்பே கண்டுபிடித்துள்ள மதிப்பை முகட்டு மதிப்பாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

பொதுவாக, $M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$ என்னும் சூத்திரம் f_m ஆனது f_1, f_2 ஆகியவைகளை விட அதிகமாக இருக்கும்பொழுது தான் கையாளப்படல் வேண்டும்.

பொதுவாக, பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலம் வரும் f_m ஐ இச் சூத்திரத்திற்குப் பயன்படுத்துவதில்லை.

எனவே, இச் சூத்திரத்தைப் பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின்றி, இக் கணக்கில் பயன்படுத்தினால் கிடைக்கும் முகட்டின் வேறு மதிப்பு கீழ்வருமாறு :

$$M_0 = 35 + \frac{180-80}{360-80-150} \times 5$$

$$= 35 + \frac{500}{130}$$

$$= 35 + 3{\cdot}84$$

$$= 38{\cdot}84$$

$\therefore$ முகடு M_0 = **38·84** (இரண்டாவது சூத்திரம் மூலம்)

(ii) சுமாரான கோட்டமுடைய வரிசையின் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய மையநிலைப் போக்குச் சராசரி அளவைகளின் சார்பு காட்டும் சூத்திரம் :

முகடு M_0 = 3 இடைநிலை — 2 கூட்டுச் சராசரி

i.e., $M_0 = 3\,M_e - 2\bar{x}$

ஆகவே, 16 = 3 இடைநிலை—2 (20·2)

(கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டதன்படி)

16 = 3 இடைநிலை—40·4

(அல்லது) 3 இடைநிலை = 16+40·4

= 56·4

∴ இடைநிலை $= \frac{56·4}{3}$

= **18·8** அங்குலங்கள்

மாதிரி 98

கீழே தரப்பட்டுள்ள குவி அலைவெண் பரவலை, சாதாரண அலைவெண் பரவலாக மாற்றியமைத்து,

(கூட்டுச் சராசரி—முகடு) = 3 (கூட்டுச் சராசரி—இடைநிலை) என்ற அனுபவநிலைச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முகட்டின் மதிப்பைக் காண்.

வருகை தராத நாட்களின் எண்ணிக்கை	மாணவர் எண்ணிக்கை	வருகை தராத நாட்களின் எண்ணிக்கை	மாணவர் எண்ணிக்கை
5-க்குக் கீழ்	29	30-க்குக் கீழ்	644
10-க்குக் கீழ்	224	35-க்குக் கீழ்	650
15-க்குக் கீழ்	465	40-க்குக் கீழ்	653
20-க்குக் கீழ்	582	45-க்குக் கீழ்	655
25-க்குக் கீழ்	634		

(பி.காம்—பம்பாய்—1940)

(பி.காம்—லக்னோ—1947)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை கணக்கிடல் :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு (x)	குவி அலை வெண் $c.f$	அலைவெண் (f)	படி விலக்கம் $d'x$ $\left(=\frac{x-12\cdot5}{5}\right)$	பெருக்கல் $fd'x$
0—5	2·5	29	29—0 = 29	—2	—58
5—10	7·5	224	224—29 = 195	—1	—195
10—15	12·5	465	465—224 = 241	0	0
15—20	17·5	582	582—465 = 117	1	117
20—25	22·5	634	634—582 = 52	2	104
25—30	27·5	644	644—634 = 10	3	30
30—35	32·5	650	650—644 = 6	4	24
35—40	37·5	653	653—650 = 3	5	15
40—45	42·5	655	655—653 = 2	6	12
			$n = 655$		$\Sigma fd'x = 49$

கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$$

$$= 12\cdot5 + \frac{49}{655} \times 5$$

$$= 12\cdot5 + 0\cdot4$$

$$= 12\cdot9 \text{ (தோராயமாக)}$$

இடைநிலை :

$M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{655+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது 328 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

328 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு '10—15' என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

$$\text{ஆகவே, இடைநிலை } M_e = l_1 + \frac{\frac{n+1}{2} - m}{f} \times C$$

$$= 10 + \frac{328-224}{241} \times 5$$

$$= 10 + 2{\cdot}2$$

$$= \mathbf{12{\cdot}2} \quad (\text{தோராயமாக})$$

முகடு :

முகடு காணும் அநுபவநிலைச் சூத்திரம் :

(கூட்டுச் சராசரி—முகடு) = 3 (கூட்டுச் சராசரி—இடைநிலை)

(அல்லது) 12·9 – முகடு = 3 (12·9—12·2)

முகடு = 12·9—2·1

= 10·8

ஆகவே, வருகை தராத நாள்களின் முகட்டு அளவு = **10·8** நாள்கள்

மாதிரி 99

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலின் முகட்டுப் பிரிவைத் தொகுதி சேர் முறைப்படி நிச்சயம் செய்துகொண்டு, பின்பு முகட்டு மதிப்பைக் காண்.

அலைவு	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	12—14	14—16
அலை வெண்	9	27	45	54	42	30	9

தீர்வு :

தொகுதி சேர் முறையில் முகட்டுப் பிரிவைக் கணக்கிடல்;

தொகுதிசேர் பட்டியல்

பிரிவு	அலைவெண் I	II	III	IV	V	VI
2—4	9	36		81		
4—6	27		72		126	
6—8	45	**99**				**141**
8—10	**54**		**96**	**126**		
10—12	42	72			81	
12—14	30		39			
14—16	9					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்தி எண்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட பிரிவுகள்				
I			8—10		
II		6—8	8—10		
III			8—10	10—12	
IV			8—10	10—12	12—14
V	4—6	6—8	8—10		
VI		6—8	8—10	10—12	
	1	3	6	3	1

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலம் பிரிவு '8—10' என்பதே அதிக எண்ணிக்கையில் (6 தடவை) வருகிறது எனத் தெரிகிறது. ஆகவே இங்கு '8—10' என்பதே முகட்டுப் பிரிவு எனக் கொள்ளலாம். ஆகவே,

முகட்டுப் பிரிவு = '8—10' ஆகும்.

முகட்டு மதிப்பைக் கணக்கிடல் :

முகடு $$M_o = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$$

$$= 8 + \frac{54-45}{108-45-42} \times 2$$

$$= 8 + \frac{9 \times 2}{21}$$

$$= \mathbf{8 \cdot 857}.$$

மாதிரி 100

கீழ்க் காணும் வயது அலைவெண் பரவல், பாட்னு பல்கலைக் கழகத்தில் 1937-ம் ஆண்டில், மெட்ரிக்குலேஷன், இன்டர்மீடியட் ஆகிய தேர்வுகள் எழுதிய மாணவர்களின் பரவலைத் தருகிறது.

வயது (ஆண்டு களில்)	12—	13—	14—	15—	—16	17—
மெட்ரிக் குலேஷன்	5	48	189	303	522	980
இன்டர் மீடியட்	—	—	—	5	45	87
வயது (ஆண்டு களில்	18—	19—	20—	21—	22—23	மொத் தம்
மெட்ரிக் குலேஷன்	981	794	515	474	—	4811
இன்டர் மீடியட்	127	150	155	127	175	871

மெட்ரிக்குலேசன் தேர்வு எழுதிய மாணவர்களின்,

(i) இடைநிலை (ii) முகட்டு வயதுகளைக் கணக்கிட்டு, அவற்றை இன்டர்மீடியட் தேர்வு எழுதிய மாணவர்கள் வயதுடன் ஒப்பிட்டுக் காட்டுக.

(எம்.ஏ-பாட்னு—1940)

தீர்வு

மெட்ரிக்குலேஷன், இன்டர்மீடியட் தேர்வு எழுதியவர்களின் இடைநிலை வயது கணக்கிடல் :

வயது ஆண்டு களில்	மெட்ரிக்குலேஷன்		இன்டர்மீடியட்	
	அலை வெண் (f)	குவி அலை வெண் $(c. f)$	அலை வெண் (f)	குவி அலை வெண் $(c. f)$
12—13	5	5	—	—
13—14	48	53	—	—
14 - 15	189	242	—	—
15—16	303	545	5	5
16—17	522	1067	45	50
17—18	980	2047	87	137
18—19	981	3028	127	264
19—20	794	3822	150	414
20—21	515	4337	155	569
21—22	474	4811	127	696
22—23	—	4811	175	871

இடைநிலைகள்

மெட்ரிக்குலேஷன் எழுதியவர்கள் :

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{4811+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது (2406) ஆவது உறுப்பு மதிப்பு. (2406) ஆவது உறுப்பு மதிப்பு '18—19' என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

$$\text{ஆகவே,} \quad M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)-m}{f} \times C$$

$$= 18 + \frac{2406-980}{981} \times 1$$

$$= 18 + 1{\cdot}4$$

$$= \mathbf{19{\cdot}4}$$ **ஆண்டுகள்** (தோராயமாக)

இன்டர்மீடியட் எழுதியவர்கள் :

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{871+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது (436)ஆவது உறுப்பு மதிப்பு. 436 ஆவது உறுப்பு மதிப்பு '20 –21' என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே $$M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 20 + \frac{(436-414)}{155} \times 1$$

$$= 20 + 0{\cdot}14$$

$$= \mathbf{20{\cdot}14}$$ **ஆண்டுகள்** (தோராயமாக)

முகடுகள்

மெட்ரிக்குலேஷன் :

பார்த்த அளவிலேயே முகட்டுப் பிரிவு '18—19' எனக் காண்கிறோம்.

ஆகவே $$M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$$

$$= 18 + \frac{981-980}{1962-980-764} \times 1$$

$$= \mathbf{18{\cdot}005}$$ **ஆண்டுகள்** (தோராயமாக)

இன்டர் மீடியட் :

இங்கு முகட்டுப் பிரிவை முதலில் தொகுதிசேர் முறையில் காணவேண்டும்.

தொகுதிசேர் பட்டியல்

வயது (ஆண்டு களில்)	அலைவெண்					
	I	II	III	IV	V	VI
12—13	—					
13-14	—					
14—15	—					
15—16	5	50		137		
16—17	45		132		259	
17—18	87	214				364
18—19	127		277	**432**		
19—20	150	305			**432**	
20—21	155		**282**			**457**
21—22	127	302				
22—23	**175**					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்தி எண்	அதிக அலைவெண் கூடுதலைக் கொண்ட பிரிவுகள்				
I					22—23
II		19—20	20—21		
III			20—21	21—22	
IV	18—19	19—20	20—21		
V		19—20	20—21	21—22	
VI			20—21	21—22	22—23
	1	3	5	3	2

மேற்கண்ட பகுப்பாய்வுப் பட்டியலின் மூலப் பிரிவு '20—21' என்பதே அதிக எண்ணிக்கையில் (5 தடவை) வந்துள்ளது எனத் தெரிகிறது. ஆகவே, இங்கு '20—21' என்பதே முகட்டுப் பிரிவாகும்.

ஆகவே, முகடு $M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$

$$= 20 + \frac{155-150}{310-155-127} \times 1$$

$$= 20 + \frac{5}{28}$$

$$= 20 + 0{\cdot}18$$

= **20·18** ஆண்டுகள் (தோராயமாக)

பெருக்குச் சராசரி
(Geometric Mean)

மாதிரி 101

4, 8, 16 என்ற எண்களின் பெருக்குச் சராசரி என்ன?

தீர்வு :

4, 8, 16 என்ற எண்களின் பெருக்குச் சராசரி

$$\text{G.M.} = (4 \times 8 \times 16)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (8 \times 8 \times 8)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \mathbf{8.}$$

மாதிரி 102

கீழ்க் காணும் எண்களின் பெருக்குச் சராசரியைக் காண் :

4·5, 250·5, 12·0, 119·5, 30·0, 42·0, 75·0, 35·4

தீர்வு :

x	$\log x$
4·5	0·6532
250·5	2·3979
12·0	1·0792
119·5	2·0792
30·0	1·4771
42·0	1·6232
75·0	1·8751
35·4	1·5490
$n = 8$	12·7339

$$G = \left(\frac{\Sigma \log x_i}{n}\right)\text{-ன் எதிர் மடக்கை}$$

$$= \left(\frac{12{\cdot}7339}{8}\right)\text{-ன் எதிர் மடக்கை}$$

$$= 1{\cdot}6\text{-ன் எதிர் மடக்கை} = \mathbf{39{\cdot}81}$$

மாதிரி 103

கீழே 14 குடும்பங்களின் ஆண்டு வருமானம் ரூபாயில் தரப்பட்டுள்ளது. பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

180, 250, 490, 120, 1400, 7000, 1050

150, 360, 100, 80, 200, 500, 240.

தீர்வு :

பெருக்குச் சராசரி கணக்கிடல் :

ஆண்டு வருமானம் (ரூபாயில்) x	$\log x$	ஆண்டு வருமானம் (ரூபாயில்) x	$\log x$
180	2·2553	150	2·1761
240	2·3979	360	2·5563
490	2·6902	100	2·0000
120	2·0792	80	1·9031
1,400	3·1461	200	2·3010
7,000	3·8451	500	2·6990
1,050	3·0212	240	2·3802
		$n = 14$	$\Sigma \log x = 35{\cdot}4507$

பெருக்குச் சராசரி $G = \dfrac{\Sigma \log x}{n}$ -ன் எதிர் மடக்கை

$$= \frac{34 \cdot 4507}{14}\text{ -ன் எதிர் மடக்கை}$$

= 2·5322 -ன் எதிர் மடக்கை

= 340·6

ஆண்டு வருமானத்தின் பெருக்குச் சராசரி = ரூ. **340·6**

மாதிரி 104

20 குடும்பங்களின் மாத வருவாய் ரூபாய்களில் கீழ் வருமாறு :

2000, 35, 400, 15, 40, 1500, 300, 6, 901, 250, 20, 12, 450, 10, 150, 8, 25, 30, 1200, 60.

(பி.காம்.—அண்ணுமலை)

(பி.காம்.—அலகாபாத்—1941)

தீர்வு :

x	$\log x$	x	$\log x$
2000	3·3010	20	1·3010
35	1·5441	12	1·0792
400	2·6021	450	2·6532
15	1·1761	10	1·0000
40	1·6021	150	2·1761
1500	3·1761	8	0·9031
300	2·4771	25	1·3979
6	0·7782	30	1·4771
901	2·9547	1200	3·0792
250	2·3979	60	1·7782
		$n = 20$	38·8544

பெருக்குச் சராசரி $G = \dfrac{\Sigma \log x}{n}$ -ன் எதிர் மடக்கை

$= \dfrac{38{\cdot}8544}{20}$ -ன் எதிர் மடக்கை

= 1·94272 -ன் எதிர் மடக்கை

= ரூ. **87·64**

மாதிரி 105

'இந்திய இம்பீரியல் வங்கி'யின் பங்குகளின் சந்தை மதிப்பு 4, சனவரி 1933-லிருந்து 30 டிசம்பர் 1933 வரை கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. (வாங்கிய மதிப்பு ரூ. 500)

1235,	1235,	1236·5,	1261·5,	1266·5
1166,	1190,	1176,	1160,	1186
1221·5,	1220,	1234,	1230,	1235
1236·5,	1232·5,	1251·5,	1244,	1231·5
1216·5,	1216·5,	1221·5,	1221·5,	1205
1184,	1196,	1212·5,	1207,	1192
1195,	1206,	1201,	1196,	1198
1208·5,	1202·5,	1234·5,	1234·5,	1225
1230,	1220,	1220·5,	1220·5,	1240
1252·5,	1246,	1246·5,	1246·5,	1230·5

(i) கூட்டுச் சராசரி, (ii) பெருக்குச் சராசரி

ஆகியவற்றை மேற்கண்ட வரிசைக்குக் காண்.

(புள்ளியியல்—கோசும், சௌதிரியும்.ப. 152)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

1235	1235	1236·5	1261·5	1266·5
1166	1190	1176	1160	1186
1221·5	1220	1234	1230	1235
1236·5	1232·5	1251·5	1244	1231·5
1216·5	1216·5	1221·5	1221·5	1205
1184	1196	1212·5	1207	1192
1195	1206	1201	1196	1198
1208·5	1202·5	1234·5	1234·5	1225
1230	1220	1220·5	1220·5	1240
1252·5	1246	1246·5	1246·5	1230·5
12145·5	12164·5	12234·5	12221·5	12189·5

மொத்தம் $= 60955{\cdot}5$

கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{60955{\cdot}5}{50}$

$= \mathbf{1219{\cdot}11}$

பெருக்குச் சராசரி கணக்கிடல் :

log x				
3·0916	3·0916	3·0923	3·1011	3·1028
3·0667	3·0755	3·0704	3·0645	3·0741
3·0871	3·0864	3·0903	3·0899	3·0916
3·0924	3·0910	3·0976	3·0948	3·0906
3·0853	3·0853	3·0871	3·0871	3·0810
3·0340	3·0777	3·0839	3·0817	3·0762
3·0773	3·0812	3·0795	3·0777	3·0784
3·0823	3·0802	3·0917	3·0917	3·0882
3·0899	3·0864	3·0867	3·0867	3·0934
3·0979	3·0955	3·0959	3·0959	3·0902
30·8045	30·8508	30·8754	30·8711	30·8665

$\Sigma \log x = 154{\cdot}2683$

பெருக்குச் சராசரி $G = \dfrac{\Sigma \log x}{n}$ -ன் எதிர் மடக்கை

$= \dfrac{154{\cdot}2683}{50}$ -ன் எதிர் மடக்கை

$= 3{\cdot}085366$ -ன் எதிர் மடக்கை

$= 1217$

ஆகவே $G = \mathbf{1217}$

மாதிரி 106

மூன்று கடைகளை மேற்பார்வையிடும் ஒருவர் A என்ற கடையில் 125 சதவீதமும், B என்ற கடையில் 75 சதவீதமும், C என்ற கடையில் 70 சதவீதமும், விற்பனை அதிகமாகியிருக்கிறதெனக் கண்டார். ஆகவே, வியாபாரம் சராசரி 90 சதவீதம் அதிகமாகியிருக்கிறதென முடிவு செய்தார். இது சரியா? இல்லையேல், சரியான முடிவுக்கு வர, அவருக்கு நீவிர் என்ன முறையில் சராசரி கணக்கிட்டுக் கொடுப்பீர்?

(பி. ஏ.—மதுரை—1972)

தீர்வு :

(1) கூட்டுச் சராசரி

கூட்டுச் சாாசரி முறையில் A, B, C என்ற மூன்று கடைகளின், சராசரி வியாபார அதிகரிப்பு $= \dfrac{125+75+70}{3}$

$= 90$ **சதவீதம்**

(2) பெருக்குச் சராசரி

பெருக்குச் சராசரி முறையில் A, B, C என்ற மூன்று கடைகளின், சராசரி வியாபார அதிகரிப்பு $= \{125 \times 75 \times 70\}^{\frac{1}{3}}$

$= \left\{ \dfrac{\log 125 + \log 75 + \log 70}{3} \right\}$-ன் எதிர் மடக்கை

$= \left\{ \dfrac{1{\cdot}8451 + 1{\cdot}8751 + 2{\cdot}0969}{3} \right\}$-ன் எதிர் மடக்கை

$= \dfrac{5{\cdot}8171}{3}$ -ன் எதிர் மடக்கை

$= 86{\cdot}90$ **சதவீதம்.**

(3) இசைச் சராசரி

இசைச் சராசரி முறையில் A, B, C என்ற மூன்று கடைகளின், சராசரி வியாபார அதிகரிப்பு $= \dfrac{3}{\frac{1}{125} + \frac{1}{75} + \frac{1}{70}}$

$$= \frac{3}{\cdot 01429 + \cdot 01333 + 0\cdot 00800}$$

$$= \frac{1}{0\cdot 0119}$$

$$= \mathbf{84\cdot 22}$$

இங்குப் பெருக்குச் சராசரியே, மற்றையச் சராசரிகளை விடப் பொருத்தமான சராசரியாகும்.

நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி

மாதிரி 107

கீழ்க் காணும் பொருள்களின் 1939-ம் ஆண்டுச் சார்பு விலைகளின் (அடிப்படை ஆண்டு 1938—விலை ரூ. 100) நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	சார்பு விலை	எடைகள்
தானியம்	128·8	1385
பருத்தி	62·4	819
வைக்கோல்	117·7	842
கோதுமை	99·0	561
ஓட் தானியம்	130·9	408
உருளைக்கிழங்கு	143·5	194
சர்க்கரை	125-6	142
பார்லி	150·2	100
புகையிலை	101·1	103
கம்பு	116·2	25
அரிசி	117·5	17
எண்ணெய் வித்துக்கள்	78 7	29

நிறையிடாச் சராசரியிலிருந்து இது எங்ஙனம் வேறுபடுகிறது?

(பி. காம்.—அலகாபாத்—1943)

தீர்வு :

சாதாரண நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி கணக்கிடல் :

பொருள்கள்	சார்பு விலை (x)	எடை (f)	$\log x$	$f \log x$
தானியம்	128·8	1385	2·1106	2923·1810
பருத்தி	62·4	819	1·7952	1470·2688
வைக்கோல்	117·7	842	2·0119	1764·5398
கோதுமை	99·0	561	1·9956	1119·5316
ஓட் தானியம்	130·9	408	2·1173	863·8584
உருளைக்கிழங்கு	143·5	194	2·1553	418·1282
சர்க்கரை	125·6	142	2·1004	298·2568
பார்லி	150·2	100	2·1761	217·6100
புகையிலை	101·1	103	2·0043	206·4429
கம்பு	116·2	25	2·0645	51·6125
அரிசி	117·5	17	2·0719	35·2233
எண்ணெய் வித்துக்கள்	78·7	29	1·8960	54·9840
$n = 12$	மொத்தம்	$\Sigma f = 4625$	$\Sigma \log x = 24·5581$	$\Sigma f \log x = 9423·6263$

(i) நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி :

$$G.W = \left(\frac{\Sigma f \log x}{\Sigma f}\right) \text{-ன் எதிர்மடக்கை}$$

$$= \left(\frac{9423·6263}{4625}\right) \text{-ன் எதிர்மடக்கை}$$

$$= 2·0375\text{-ன் எதிர்மடக்கை}$$

$$= 109·14$$

(ii) சாதாரணப் பெருக்குச் சராசரி :

$$G = \left(\frac{\Sigma \log x}{n}\right) \text{-ன் எதிர்மடக்கை}$$

$$= \left(\frac{24 \cdot 5581}{12}\right) \text{-ன் எதிர்மடக்கை}$$

$$= 2 \cdot 0465 \text{ -ன் எதிர்மடக்கை}$$

$$= 111 \cdot 3$$

இரண்டு பெருக்குச் சராசரிகளையும் ஒப்பிட்டு வித்தியாசம் காணலாம்.

மாதிரி 108

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்குப் பெருக்குச் சராசரி காண்.

பிரிவு	0—10	10—20	20—30	30—40	மொத்தம்
அலைவெண்	5	8	3	4	20

பெருக்குச் சராசரி கணக்கிடல் :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு (x)	அலைவெண் (f)	மடக்கை $\log x$	பெருக்கல் $f \log x$
0—10	5	5	0·6990	3·4950
10—20	15	8	1·1761	9·4088
20—30	25	3	1·3979	4·1937
30—40	35	4	1·5441	6·1764
மொத்தம்		$\Sigma f = 20$		$\Sigma f \log x = 23 \cdot 2739.$

பெருக்கல் சராசரி $G = \left(\frac{\Sigma f \log x}{\Sigma f}\right)$-ன் எதிர் மடக்கை

$= \left(\frac{23 \cdot 2739}{20}\right)$-ன் எதிர் மடக்கை

$= 1 \cdot 1637$-ன் எதிர் மடக்கை

$= 14 \cdot 58$ (தோராயமாக)

மாதிரி 109

கீழ்க் காணும் பட்டியலில் தரப்பட்ட 564 பிள்ளைகளின் எடைகளின் (பவுண்டில்) பரவலுக்குப் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

எடை (பவுண்டில்)	99·5—	104·5—	109·5—	114·5—	119·5—	124·5—
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	24	30	45	65	72	84
எடை (பவுண்டில்)	129·5—	134·5—	139 5—	144·5—	149·5—154·5	
பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	124	58	22	32	8	

தீர்வு :

பெருக்குச் சராசரி கணக்கிடல் :

எடை (பவுண்டில்)	மத்திய மதிப்பு (x)	பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை (f)	மடக்கை $\log x$	பெருக்கல் $f \log x$
99·5—104·5	102	24	2·0086	48·2064
104·5—109 5	107	30	2·0294	60·8820
109·5—114·5	112	45	2·0492	92·2140
114·5—119·5	117	65	2·0682	134·4330
119·5—124·5	122	72	2·0804	149·7888
124·5—129·5	127	84	2·1038	176·7192
129·5—134·5	132	124	2·1206	262·9544
134·5—139·5	137	58	2·1376	123·9808
139·5—144·5	142	22	2·1523	47·3506
144·5—149·5	147	32	2·1673	69·3536
149·5—154·5	152	8	2·1818	17 4544
	மொத்தம்	$\Sigma f = 564$		$\Sigma f \log x = 1183·3372$

பெருக்குச் சராசரி

$$G = \left(\frac{\Sigma f \log x}{\Sigma f}\right) \text{-ன் எதிர் மடக்கை}$$

$$= \left(\frac{1183·3372}{564}\right) \text{-ன் எதிர் மடக்கை}$$

= 2·0981-ன் எதிர் மடக்கை

= 125·3

மாதிரி 110

கீழ்க் காணும் பட்டியல் உத்தரப் பிரதேச மாநிலத்தில் ஒரு கிராமத்தின் வெவ்வேறு இனத்தவரின் குடும்ப வருமானத்தைத் தருகிறது.

(i) நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி

(ii) நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி

(iii) நிறையிட்ட இசைச் சராசரி

ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்டு, எந்தச் சராசரி இங்குப் பொருத்த மாக இருக்கிறது எனக் கூறு.

மக்கள் இனம்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	ஒவ்வொரு குடும்ப வருமானம் (ரூபாயில்)
நிலச்சுவான்தார்	1	1000
உழவர்கள்	50	80
நிலமற்ற கூலியாட்கள்	25	40
லேவாதேவித் தொழில் செய்வோர்	2	750
பள்ளி ஆசிரியர்கள்	3	100
கடை வைத்திருப்பவர்கள்	4	150
தச்சர்கள்	3	120
நெசவாளிகள்	5	60

(எம்.ஏ. —ஆக்ரா—1949)

நிறையிட்ட (i) கூட்டல் (ii) பெருக்கல் (iii) இசைச் சராசரிகளைக் காணல் :

இனம்	w	x	xw	$\log x$	$w \log x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{w}{x}$
நிலச்சுவான்தார்	1	1000	1000	3·0000	3·0000	0·0010	·0010
உழவர்கள்	50	80	4000	1·9031	95·1550	0·0125	·6250
நிலமற்ற கூலியாட்கள்	25	40	1000	1·6021	40·0525	0·0250	·6250
வேவாதேவித் தொழில் புரிவோர்	2	750	1500	2·8751	5·7502	0·0013	·0026
பள்ளி ஆசிரியர்கள்	3	100	300	2·0000	6·0000	0·0100	·0300
கடை வைத்திருப்பவர்கள்	4	150	600	2·1761	8·7044	0·0067	·0268
தச்சர்கள்	3	120	360	2·0792	6·2376	0·0083	·0249
நெசவாளிகள்	5	60	300	1·7782	8·8910	0·0167	·0835
மொத்தம்	$\Sigma w = 93$		$\Sigma xw =$ 9060		$\Sigma w \log x$ 173·7907		$\Sigma \frac{w}{x} =$ 1.4188

(i) நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x}_w = \frac{\Sigma x w}{\Sigma w} = \frac{9060}{93} = \mathbf{97 \cdot 4}$$

(ii) நிறையிட்ட பெருக்குச் சராசரி } $G \cdot W = \left[\frac{\Sigma (w \log x)}{\Sigma w}\right]$-ன் எதிர் மடக்கை

$= \left[\frac{173 \cdot 7907}{93}\right]$-ன் எதிர் மடக்கை

$= 1 \cdot 8687$-ன் எதிர் மடக்கை

$= \mathbf{73 \cdot 96}$

(iii) நிறையிட்ட இசைச் சராசரி } $H.W = \left[\frac{\Sigma \left(\frac{f}{w}\right)}{n}\right]$-ன் தலைகீழ்ப் பின்னம்

$= \left[\frac{1 \cdot 4188}{93}\right]$-ன் தலைகீழ்ப் பின்னம்

$= \frac{93}{1 \cdot 4188} = \mathbf{65 \cdot 36}$

மேற்கண்ட சராசரிகளில், பெருக்குச் சராசரி கொடுத்த கணக்கிற்குப் பொருத்தமானதாக விளங்குகிறது.

இசைச் சராசரி
(Harmonic Mean)

மாதிரி 111

கீழ்க் காணும் எண்களுக்கு இசைச் சராசரி கணக்கிடுக.

(a) 6, 8, 10 (b) 4, 8, 16

(c) 2, 4, 8

தீர்வு :

(*a*) இசைச் சராசரி :

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{3}{\left(\frac{25+15+12}{20}\right)}$$

$$= \frac{360}{47}$$

$$= 7\tfrac{31}{47}$$

(*b*) இசைச் சராசரி :

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{3}{0{\cdot}25 + 0{\cdot}125 + 0{\cdot}0625}$$

$$= \frac{3}{0{\cdot}4375}$$

$$= \frac{4{\cdot}8}{7}$$

$$= 6{\cdot}855$$

(*c*) இசைச் சராசரி :

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}$$

$$= \frac{3}{0.5+0.25+0.125}$$

$$= \frac{3}{0.875}$$

$$= \frac{27}{7}$$

$$= \mathbf{3.428}$$

மாதிரி 112

கீழ்க் காணும் வரிசைக்கு இசைச் சராசரியைக் காண்.

32, 35, 36, 37, 39, 41, 43, 47, 48.

தீர்வு :

உறுப்புகளின் அளவு (x)	தலைகீழ்ப் பின்னம் $\frac{1}{x}$
32	0·03125
35	0·02857
36	0·02778
37	0·02703
39	0·02564
41	0·02439
43	0·02326
47	0·02128
48	0·02083
$n = 9$	0·23003

இசைச் சராசரி $H = \dfrac{n}{\Sigma \frac{1}{x}}$

$$= \frac{9}{0.23003} = \mathbf{39.3} \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி 113

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு இசைச் சராசரி காண்.

பிரிவு	2—4	4—6	6—8	8—10
அலைவெண்	20	40	30	10

தீர்வு :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	அலை வெண் f	தலைகீழ்ப் பின்னம் $\frac{1}{x}$	$f \times \frac{1}{x}$
2— 4	3	20	0·3333	6·666
4— 6	5	40	0·2000	8·000
6— 8	7	30	0·1428	4·284
8—10	9	10	0·1111	1·111
		100		20·061

இசைச் சராசரி

$$H = \frac{n}{\Sigma\left(f \times \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{100}{20{\cdot}061}$$

$$= \mathbf{4{\cdot}985}$$

மாதிரி 114

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு இசைச் சராசரியைக் காண்.

பிரிவு	40—50	50—60	60—70	70—80	80—90	90—100
அலை வெண்	19	52	36	72	51	43

தீர்வு :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு (x)	அலைவெண் (f)	தலைகீழ்ப் பின்னம் $\frac{1}{x}$	$\frac{f}{x}$
40 — 50	45	19	0·0222	0·4218
50 — 60	55	25	0·0182	0·4550
60 — 70	65	36	0 0154	0·5544
70 — 80	75	72	0·0133	0·9576
80 — 90	85	51	0·0118	0·6018
90 —100	95	43	0·0105	0·4515
		246		3·4421

இசைச் சராசரி :

$$H = \frac{\Sigma f}{\Sigma\left(\frac{f}{x}\right)}$$

$$= \frac{246}{3 \cdot 4421}$$

$$= 71 \cdot 4$$

மாதிரி 115

ஓரிடத்தில் வசிக்கும் 10 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது :

(i) கூட்டுச் சராசரி (ii) பெருக்குச் சராசரி
(iii) இசைச் சராசரி

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. கணக்கிட்ட 3 சராசரிகளில் எந்தச் சராசரி இந்தக் கணக்கிற்குப் பொருந்துகிறது ?

குடும்பம்	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
வருமானம்	85	70	10	75	500	8	45	250	40	36

(பி. காம்.—ஆக்ரா—1945)

குடும்பம்	வருமானம் (x)	மடக்கை $\log x$	தலைகீழ்ப் பின்னம் $\frac{1}{x}$
A	85	1·9294	0·0118
B	70	1·8451	0·0143
C	10	1·0000	0·1000
D	75	1·8751	0·0133
E	500	2·6790	0·0050
F	8	0·9031	0·1250
G	42	1·6232	0·0238
H	250	2·3979	0·0040
I	40	1·6021	0·0250
J	36	1·5563	0·0278
$n=10$	$\Sigma x =$ 1116	$\Sigma \log x$ = 17·4312	$\Sigma \frac{1}{x}$ = 0·3470

(i) கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{1116}{10}$$

= ரூ. **111·6**

(ii) பெருக்குச் சராசரி

$$G = \left(\frac{\Sigma \log x}{n}\right)$$ -ன் எதிர் மடக்கை

$$= \left(\frac{17{\cdot}4312}{10}\right)$$ -ன் எதிர் மடக்கை

= 1·7431-ன் எதிர் மடக்கை

= ரூ. **55·34**

(iii) இசைச் சராசரி

$$H = \frac{\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)}{n} \text{-ன் தலைகீழ்ப் பின்னம்}$$

$$= \frac{n}{\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{10}{0{\cdot}3470}$$

$$= \text{ரூ. } 28{\cdot}8$$

மேற்கண்ட கணக்கில் பெருக்குச் சராசரி மற்றையச் சராசரிகளை விடச் சரியாகப் பொருந்துகிறது எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 116

முதல் 30 கிலோ மீட்டர் தூரத்தை மணிக்கு 15 கி.மீ. வேகத்திலும், இரண்டாவது 30 கிலோ மீட்டர் தூரத்தை மணிக்கு 20 கி. மீ. வேகத்திலும், மூன்றாவது 30 கிலோ மீட்டர் தூரத்தை மணிக்கு 25 கி. மீ. வேகத்திலும் ஒரு கார் கடந்தால், காரின் சராசரி வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

இங்கு, கார் சென்ற மொத்தத் தூரத்தின் சராசரி வேகத்தைக் கணக்கிட, இசைச் சராசரியைக் கணக்கிட வேண்டும். ஆகவே,

$$\text{இசைச் சராசரி } H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25}}$$

$$= \frac{3}{0{\cdot}06667 + 0{\cdot}05000 + 0{\cdot}04000}$$

$$= \frac{3}{0{\cdot}15667}$$

$$= 19{\cdot}15 \text{ கி. மீ./மணிக்கு}$$

காரின் வேகம் $= 19{\cdot}15$ கி. மீ./மணிக்கு.

மாதிரி 117

(a) முதல் ஒரு மைலை மணிக்கு 10 மைல் வேகத்திலும், இரண்டாவது மைலை மணிக்கு 8 மைல் வேகத்திலும், மூன்றாவது மைலை மணிக்கு 6 மைல் வேகத்திலும் ஒருவர் குதிரைச் சவாரி மூலம் கடந்தால் அவருடைய சராசரி வேகமென்ன ?

(b) முதல் பத்தாண்டுகளில் 20% ஏற்றமும்; இரண்டாவது பத்தாண்டுகளில் 25% ஏற்றமும்; மூன்றாவது பத்தாண்டுகளில் 44% ஏற்றமும் என மக்கள் தொகை கூடினால் சராசரி மக்கள் தொகைக் கூடுதலைக் கண்டுபிடி.

(யூ.ப.ச.க.—1962)

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1938)

தீர்வு :

(a) இங்கு, இசைச் சராசரி கணக்கிடலே பொருத்தமான தாகும்.

$$\text{ஆகவே,}\quad H = \frac{3}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{3}{0{\cdot}1+0{\cdot}125+0{\cdot}1666}$$

$$= \frac{3}{0{\cdot}3916}$$

$$= 7{\cdot}662 \text{ மைல்/மணிக்கு}$$

ஆகவே, மணிக்கு வேகம் = **7·662 மைல்.**

(b) இங்குப் பெருக்கல் சராசரியே பொருத்தமானதாகும்.

$$\text{ஆகவே,}\quad G = \left[\frac{(\log 20+\log 25+\log 44)}{3}\right]\text{-ன் எதிர் மடக்கை}$$

$$= \left(\frac{4{\cdot}3424}{3}\right)\text{-ன் எதிர் மடக்கை}$$

$$= 1{\cdot}4474\text{-ன் எதிர் மடக்கை}$$

$$= 28{\cdot}02\%$$

ஆகவே, மக்கள் தொகை ஏற்றத்தின் சராசரி = **28·02**%

மாதிரி 118

A-லிருந்து B என்ற இடத்திற்கு ஒருவர் மோட்டார் வாகனத்தில் செல்கிறார். B-க்குச் செல்லும்பொழுது அவர் ஒரு மலையில் ஏறிச் செல்ல வேண்டியிருக்கிறது. ஆதலின் அவர் 1 காலன் காசோலின் எண்ணெய்க்கு 10 மைல் செல்கிறார். திரும்பி வரும்பொழுது ஒரு காலனுக்கு 15 மைல் ஓட்டுகிறார். இசைச் சராசரி கணக்கிட்டு, காலனுக்குச் செல்லும் மைல் தூரத்தைக் காண்.

தீர்வு

A-லிருந்து B-க்கு உள்ள தூரம் 60 மைல் எனக் கொண்டு, இங்கு, இசைச் சராசரி கணக்கிடலே சரியான முறையாகும் எனத் தீர்வு கொள்.

1 காலனுக்குச் செல்லும் தூரத்தின் இசைச் சராசரி $\left.\right\} H = \dfrac{2}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}$

$$= \frac{2}{0{\cdot}1000+0{\cdot}0666}$$

$$= \frac{2}{0{\cdot}1666}$$

$= 12$ மைல் / காலனுக்கு (தோராயமாக)

இங்கு, கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 12{\cdot}5$ மைல்/காலனுக்கு.

இங்கு இசைச் சராசரியே பொருத்தமானதாகும்.

மலைக்கு மேலே ஏறும்பொழுது 6 காலன் காசோலினும், மலையிலிருந்து இறங்கும்போது 4 காலன் காசோலினும் செலவாகி இருக்கிறது. ஆகவே, 10 காலன் காசோலின் செலவழித்து 120 மைல் கடந்தார் எனக் கொண்டால் இது ஒரு காலனுக்கு 12 மைல் சென்றதாக ஆகிறது. ஆனால் கூட்டுச் சராசரி $= 12{\cdot}5$. இது தவறான சராசரி என்று தெரிகிறது. ஆகவே, இசைச் சராசரியே இந்தக் கணக்கிற்குப் பொருத்தமானது என முடிவு செய்யலாம்.

மாதிரி 119

மொத்தத் தூரமாகிய 400 கிலோ மீட்டர் இடைவெளியை ஒரு பறக்கும் கப்பல் கீழ்க் காணும் வேகத்தில் கீழ்க் காணும் முறைப்படி

(i) முதல் நூறு கிலோ மீட்டர்களை மணிக்கு 100 கிலோ மீட்டர் வேகத்திலும்,

(ii) இரண்டாவது நூறு கிலோ மீட்டர்களை மணிக்கு 200 கி.மீ. வேகத்திலும்,

(iii) மூன்றாவது நூறு கிலோ மீட்டர்களை மணிக்கு 300 கி.மீ. வேகத்திலும்,

(iv) நான்காவது நூறு கிலோ மீட்டர்களை மணிக்கு 400 கிலோ மீட்டர் வேகத்திலும் பறந்து கடக்கிறது.

பறக்கும் கப்பலின் சராசரி வேகத்தைக் கணக்கிடு.

தீர்வு :

இக் கணக்கில் வேகச் சராசரி காண இசைச் சராசரியைக் கணக்கிடவேண்டும்.

ஆகவே, இசைச் சராசரி $H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}}$

$$= \frac{4}{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}}$$

$$= \frac{4}{0{\cdot}01+0{\cdot}005+0{\cdot}0033+0{\cdot}0025}$$

$$= \frac{4}{0{\cdot}0208}$$

$$= 192{\cdot}3$$

ஆகையால், பறக்கும் கப்பலின் சராசரி வேகம் = 192·3 கி.மீ./1 மணிக்கு

மாதிரி 120

ஒரு வெப்பமானியில் கண்ட ஒரு தொகுப்பு வாசிப்புகளுக்குக் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடும்பொழுது, சென்டிகிரேடில் வாசித்தாலும் பாரன்ஹீட்டில் வாசித்தாலும் சராசரியில் ஒரு மாற்றமும் காணப்படுவதில்லை. ஆனால், இங்ஙனம் இருவிதமாக வாசித்த முடிவுகளுக்குப் பெருக்குச் சராசரி கணக்கிட்டால் முடிவுகள் வித்தியாசப்படுகின்றன என நிரூபி.

தீர்வு :

கணக்கில் கொண்ட வெப்பமானியின் வாசிப்புகள் எண்ணிக்கை $= n$

சென்டிகிரேடில் வாசித்த டிகிரிகள் $= C_1, C_2, C_3 \ldots \ldots C_n$

பாரன்ஹீட்டில் வாசித்த டிகிரிகள் $= F_1, F_2, F_3 \ldots \ldots F_n$

ஆக இருக்கட்டும்.

இரண்டுக்குமுள்ள சமன்பாடு :

$$F_i = 32 + \frac{9}{5} C_i \; ; \; i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots n$$

தற்பொழுது N சென்டி கிரேட் வாசிப்புகளின் கூட்டுச் சாரசரி :

$$\bar{x}_i = \frac{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots C_n}{n}$$

அதே வாசிப்புகளைப் பாரன்ஹீட்டில் வாசித்து, அதன் கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x}_F = \frac{F_1 + F_2 + F_3 \ldots\ldots\ldots F_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[32 + \frac{9}{5} C_i \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[32n + \frac{9}{5} \sum_{i=1}^{n} C_i \right]$$

$$= 32 + \frac{9}{5} \bar{x}_c$$

ஆகவே $\bar{x}_f = 32 + \frac{9}{5} \bar{x}_c$ என்ற சமன்பாடு சரியாகும்.

பெருக்கல் சராசரி :

சென்டிகிரேட் வாசிப்புகளின் பெருக்கல் சராசரி

$$G_c = (C_1\, C_2\, C_3 \ldots\ldots C_n)^{\frac{1}{n}}$$

அதே டிகிரிகளை பாரன்ஹீட் வாசிப்பில் பெருக்கல் சராசரி $\Big\}$ $G_f = (F_1\, F_2\, F_3 \ldots\ldots F_n)^{\frac{1}{n}}$

$$= \left[\left(32+\frac{9}{5}C_1\right)\left(32+\frac{9}{5}C_2\right)\right.$$

$$\left. \ldots\ldots\left(32+\frac{9}{5}C_n\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= 32\left[\left(1+\frac{9}{160}C_1\right)\left(1+\frac{9}{160}C_2\right)\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\left(1+\frac{9}{160}C_n\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= 32\left[\left(1+\frac{9}{160N}C_1+\ldots\ldots\right)\left(1+\frac{9}{160N}C_2\ldots\ldots\right)\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\left(1+\frac{9}{160N}C_n\right)\right]$$

$$= 32+\frac{9}{5n}\left(C_1+C_2+\ldots\ldots C_n\right)+\ldots\ldots \neq G_c$$

இங்கு $G_F \neq G_C$ எனக் காண்கிறோம்.

ஆகவே, செண்டிகிரேட், பாரன்ஹீட் வாசிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியில் மாற்றமில்லை என்றும், ஆனால் அவைகளின் பெருக்கல் சராசரிகளுக்கு வித்தியாசம் உண்டு என்றும் கண்டோம்.

மாதிரி 121

ஒரு மாறி $a, ar, ar^2, \ldots\ldots ar^{n-1}$ என்ற மதிப்புகளை எடுத்துக் கொண்டு அவற்றின் அலைவெண்களை முறையே 1, 1, 1,.... .... 1 எனக் கொண்டு அலைவெண் பரவலை ஏற்படுத்தினால்,

(i) கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{a(1-r^n)}{n(1-r)}$ என்றும்,

(ii) பெருக்கல் சராசரி $G = ar^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ என்றும்

(iii) இசைச் சராசரி $H = \frac{an(1-r)}{1-r^n}\, r^{(n-1)}$

இருக்கின்றன என்று காட்டு.

தீர்வு :

அலைவெண் பரவல்

மாறி (x) : $a \quad ar \quad ar^2 \ldots\ldots\ldots ar^{(n-1)}$

அலைவெண் : $1 \quad 1 \quad 1 \ldots\ldots\ldots 1$

(i) ஆகவே, கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-1}}{n}$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{n(1-r)}$$

(ii) ஆகவே, பெருக்குச் சராசரி

$$G = (a \times ar + ar^2 \times \ldots\ldots \times ar^{n-1})^{1/n}$$

$$= a\left(r^{1+2+3+\cdots n-1}\right)^{1/n}$$

$$= ar^{\frac{(n-1)}{2}}$$

(iii) ஆகவே, இசைச் சராசரி

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\ldots+\frac{1}{ar^{n-1}}}{n}$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r^n}-1\right)}{n\left(\frac{1}{r}-1\right)}$$

$$= \frac{1-r^n}{an(1-r)\,r^{n-1}}$$

ஆகவே, $H = \dfrac{an(1-r)\,r^{n-1}}{1-r^n}$

மாதிரி 122

(i) முதல் இருபது கிலோ மீட்டர்களை 6 கி. மீ. வேகத்திலும்,

(ii) இரண்டாவது இருபது கிலோ மீட்டர்களை 8 கி. மீ. வேகத்திலும்,

(iii) மூன்றுவது இருபது கிலோ மீட்டர்களை 12 கி.மீ. வேகத்திலும்,

(iv) நான்காவது இருபது கிலோ மீட்டர்களை 24 கி. மீ. வேகத்திலும்,

ஒரு மோட்டார் வாகனம் தனது நிலையிலிருந்து புறப்பட்டுக் கடந்தால், அந்த மோட்டாரின் சராசரி வேகம் 12·5 கி.மீ. என்பது தவறுகும். உண்மையான சராசரி வேகம் 9·6 கி. மீ. ஆகும் எனக் காட்டு.

தீர்வு :

மணிக்கு முறையே 6, 8, 12, 24 கி. மீட்டர்கள் வேகத்தில் சென்ருல்,

$$\text{கூட்டுச் சராசரி வேகம்} = \frac{6+8+12+24}{4}$$

$$= 12 \cdot 5 \text{ கி. மீ./மணிக்கு.}$$

$$\text{சராசரி வேகம்} = \frac{\text{மொத்தத் தூரம் பிரயாணம் செய்தது}}{\text{மொத்த நேரம் எடுத்துக் கொண்டது}}$$

என இருப்பதாலும்,

முன் மாதிரிகளில் பார்த்தது போல், இது சரியான சராசரி யாகாது. உண்மையான சராசரி வேகம் காண, இசைச் சராசரியைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$\text{ஆகவே, சராசரி வேகம்} = \frac{4}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{120} + \frac{1}{160} + \frac{1}{240} + \frac{1}{480}}$$

$$= 9 \cdot 6 \text{ கி.மீ./மணிக்கு.}$$

மாதிரி 123

(i) 1954-ம் ஆண்டில் 5% என்றும்,

(ii) 1955-ம் ஆண்டில் 8% என்றும்,

(iii) 1956-ம் ஆண்டில் 77% என்றும்,

ஒரு நுகர் பொருளின் விலை ஏற்றமடைகிறது என்றால், 1954— 56-ம் ஆண்டுகளில் விலை ஏற்றம் 30% என்பது சரியல்ல; உண்மையான விலை ஏற்றம் 26% ஆகும் என்பதை விளக்கமாகக் கணக்கிட்டு, சாதாரண மனிதனுக்குப் புரியும்படி விளக்கவும்.

(எம்.ஏ.—ஆக்ரா—1962)

தீர்வு :

மேலே கொடுத்துள்ளபடி 1954-ம் ஆண்டுத் துவக்கத்தில் விலை ரூ. 100 என இருந்தால் அவ்வாண்டின் இறுதியில் அப் பொருளின் விலை ரூ. 105 ஆகும்.

அதேபோல், 1955-ம் ஆண்டுத் துவக்க விலை ரூ. 100 என்றால், இறுதி விலை ரூ. 108 ஆகும். 1956-ம் ஆண்டுத் துவக்க விலை ரூ. 100 என்றால் இறுதி விலை ரூ. 177 ஆகும்.

ஆகவே, ஓர் ஆண்டின் துவக்கச் சராசரி விலை ரூ. 100 என்றால் அவ்வாண்டின் இறுதிவிலை காண, 105, 108, 177 என்ற விலைகளின் பெருக்கல் சராசரியைக் காணவேண்டும்.

$$\therefore \quad G = (105 \times 108 \times 177)^{1/3}$$

$$= \left[\frac{(\log 105 + \log 108 + \log 177)}{3}\right]\text{-ன் எதிர் மடக்கை}$$

$$= \left[\frac{2{\cdot}0212 + 2{\cdot}0334 + 2{\cdot}2480}{3}\right]\text{-ன் எதிர் மடக்கை}$$

$$= 2{\cdot}1009 \text{ ன் எதிர் மடக்கை}$$

$$= \text{ரூ. } 126 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

ஆகவே சராசரி விலைக் கூடுதல் } = 26% ஆகும்.

விலைகளின்கூட்டுச் சராசரி } $= \left[\frac{(5+8+77)}{3}\right] \%$

$$= \left(\frac{90}{3}\right) \%$$

$$= 30\%$$

ஒவ்வோர் ஆண்டும் விலை ஏற்றம் 30% எனக் கொண்டால்,

$$\left.\begin{array}{r}\text{1956-ம் ஆண்டு இறுதியில்}\\ \text{அப்பொருளின் விலை}\end{array}\right\} = 100 \times \frac{130}{100} \times \frac{130}{100} \times \frac{130}{100}$$

$$= 219{\cdot}7$$

இவ் விலையானது, 1956-ம் ஆண்டின் உண்மையான இறுதி விலை

$$= 100 \times \frac{105}{100} \times \frac{108}{100} \times \frac{177}{100}$$

$$= 200{\cdot}718 \text{ ஐ}$$

விட அதிகமாக இருக்கிறது.

ஆனால், $100 \times \frac{126}{100} \times \frac{126}{100} \times \frac{126}{100}$ என்ற பெருக்குச் சராசரி விலை (200·1) உண்மையான விலை ஏற்றத்துக்குச் (200·7) சமமாக இருக்கிறது. இதனால், இங்குப் பெருக்குச் சராசரி மூலம் கணக்கிடப்படும் சராசரிதான் பொருந்தும் எனக் காண்கிறோம்.

நிறையிட்ட இசைச் சராசரி

மாதிரி 124

கீழே தரப்பட்ட பட்டியலுக்கு,

(i) சாதாரண இசைச் சராசரி

(ii) நிறையிட்ட இசைச் சராசரி

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

உறுப்பின் அளவு	68	85	101	102	108	110	112	113
எடை	1	46	31	1	11	7	23	17
உறுப்பின் அளவு	124	128	143	146	151	153	172	
எடை	9	14	2	4	6	5	2	

(திருவனந்தபுரம் பல்கலை)

தீர்வு :

நிறையிட்ட இசைச் சராசரி கணக்கிடல்:

உறுப்பு அளவு (x)	எடை (w)	தலை கீழ்ப் பின்னம் $\frac{1}{x}$	பெருக்கல் $w \times \frac{1}{x}$
68	1	0·014710	0·014710
85	46	0·011760	0·540960
101	31	0·009901	0·306931
102	1	0·009804	0·009804
108	11	0·009259	0·101849
110	7	0·009091	0·063637
112	23	0·008929	0·205367
113	17	0 008850	0·150450
124	9	0·008065	0·072585
128	14	0·007813	0·109383
143	2	0·006993	0·013986
146	4	0·006849	0·027396
151	6	0·006623	0·039738
153	5	0·006536	0·032686
172	2	0·005814	0·011628
$n = 15$	$\Sigma w = 179$	0·130997	1·701103

(i) சாதாரண இசைச் சராசரி

$$H = \frac{n}{\Sigma\ 1/x}$$

$$= \frac{15}{0{\cdot}130997}$$

$$= 114{\cdot}5$$ (தோராயமாக)

(ii) நிறையிட்ட இசைச் சராசரி

$$Hw = \frac{\Sigma w}{\Sigma \left(\frac{w}{x}\right)}$$

$$= \frac{179}{1 \cdot 701103}$$

$$= \mathbf{105 \cdot 3} \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி 125

75 கண்டறிந்த புள்ளி விவரங்களின் கூட்டுச் சாரசரி, முகடு, இடைநிலை ஆகியவைகள் முறையே 27,34,29 என இருந்தன. சரியான மதிப்பு 53-க்குப் பதில், தவருக 43 என்ற மதிப்பைக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்டுள்ளது என்பது பின்பு கண்டறியப் பட்டது. இப் பிழையைக் கண்டறிந்ததன் மூலம், முன் கணக்கிடப் பட்ட மூன்று சாரசரிகளும் எந்த அளவு தவருக உள்ளன என் பதனைக் கண்டறியவும்.

(எம். ஏ.—டெல்லி-1963)

தீர்வு :

(1) கூட்டுக் சராசரி $\overline{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

அதாவது, $27 = \frac{\Sigma fx}{75}$

$\Sigma fx = 75 \times 27$

$= \mathbf{2025}$

தவருகக் கொண்ட 43 என்ற மதிப்பை 53 ஆக மாற்றிக் கணக்கிட்டால் சரியான $\Sigma fx = 2025 - 43 + 53$

$= 2035$

ஆகவே, சரியான கூட்டுச்சராசரி $\overline{x} = \frac{2035}{27}$

$= \mathbf{27 \cdot 13}$

(2) உண்மையான மதிப்பு $= 53$

தவறுதலான மதிப்பு $= 43$

கணக்கிடப்பட்ட இடைநிலை $= 29$

ஆகவே, இங்கு 43ஐ, 53 ஆக மாற்றிக் கணக்கிடப்படும் இடைநிலையின் மதிப்பும் 29 ஆகவே இருக்கிறது.

(3) 'முகடு' என்பது அடிக்கடி வந்துள்ள எண்ணுகும். ஆகவே, ஓர் எண்ணைத் தவறுதலாகக் கொண்டு கணக்கிட்டதனுல் மட்டும் முகடு மதிப்பு மாறப் போவதில்லை என அறியலாம்.

மாதிரி 126

50 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வு எழுதினுர்கள். தேர்வில் வெற்றியடைந்த மாணவர்களின் முடிவின் அலைவெண் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பெண்கள்	4	5	6	7	8	9
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	10	9	6	4	3

மொத்த 50 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சாரசரி 5·16 என்ருல் தேர்வு அடைந்த மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி காண்.

(பி.காம். — ஆக்ரா—1963)

தீர்வு :

வெற்றியடைந்த மாணவர்கள் எடுத்த மொத்த மதிப்பெண் களின் கூடுதலைக் கணக்கிடல் :

மதிப்பெண் x	அலைவெண் f	பெருக்கல் fx
4	8	32
5	10	50
6	9	54
7	6	42
8	4	32
9	3	27
	40	237

மொத்த மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூடுதல்

$$= 50 \times 5 \cdot 16$$

= 258 மதிப்பெண்கள்

வெற்றி பெற்ற 40 மாணவர்கள் எடுத்த மதிப் பெண்களின் கூடுதல் = 237 மதிப்பெண்கள்

ஆகவே, தோல்வியடைந்த 10 மாணவர்கள் எடுத்த மதிப் பெண்களின் கூடுதல்

$$= 258 - 237$$

$$= 21$$

∴ தோல்வியடைந்த மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{21}{10}$$

= 2·1 மதிப்பெண்கள்.

மாதிரி 127

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களைச் சாதாரண அலைவெண் பரவல் பட்டியலாக மாற்று.

3 க்குக் குறைவாக மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் = 5 மாணவர்கள்

6-க்குக் குறைவாக மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் = 12 மாணவர்கள்

9-க்குக் குறைவாக மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் = 25 மாணவர்கள்

12-க்குக் குறைவாக மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் = 33 மாணவர்கள்

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1962)

தீர்வு :

சாதாரண அலைவெண் பரவல் பட்டியல் தயாரித்தல் :

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை
0— 3	5
3— 6	12 — 5 = 7
6— 9	25 — 12 = 13
9—12	33 — 25 = 8
	33

மாதிரி 128

சுமாரான கோட்டமுடைய வரிசை எண், முகடு, இடைநிலைகள் முறையே 16", 15·6" என இருந்தால் அவ்வரிசையின் பொதுவாக நிகழக்கூடிய இடைநிலை என்ன ?

(பி.காம்.—சென்னை—1960)

தீர்வு :

அனுபவநிலைச் சூத்திரம் :

முகடு = 3 இடைநிலை — 2 கூட்டுச் சராசரி

அல்லது 16 = 3 இடைநிலை — (2 × 15·6)

3 இடைநிலை = 47·2

$\therefore$ இடைநிலை $= \frac{47 \cdot 2}{3}$

$= 15 \cdot 73''$

மாதிரி 129

15 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி எடை 110 பவுண்டுகள். அவர்களுள் 5 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி எடை 100 பவுண்டுகள்; அடுத்த 5 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி எடை 125 பவுண்டுகள். மீதமுள்ள 5 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி எடை என்ன ?

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1962)

தீர்வு :

மீதமுள்ள கடைசி 5 மாணவர்களின் கூட்டுச்சராசரி எடை

$$= \frac{n \times \overline{x} - (n_1 \times \overline{x}_1) - (n_2 \times \overline{x}_2)}{n - n_1 - n_2}$$

$$= \frac{(15 \times 110) - (5 \times 100) - (5 \times 125)}{15 - 5 - 5}$$

$$= \frac{1650 - 500 - 625}{4}$$

$$= \frac{525}{5}$$

$= 105$ பவுண்டுகள்

மாதிரி 130

காலனுக்கு 20 மைல் வேகம் என்று முதல் 10 மைல்களும், காலனுக்கு 15 மைல் வேகம் என்று இரண்டாவது 90 மைல்களும் ஒரு மோட்டார் வாகனம் கடந்து சென்றால், காலனுக்குச் சராசரியாகச் செல்லும் மைல்களின் எண்ணிக்கை என்ன ?

(பி. காம்.—திருவனந்தபுரம்—1961)

தீர்வு :

நிறையிட்ட இசைச் சராசரி

$$Hw = \frac{w_1 + w_2}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2}}$$

$$= \frac{10 + 90}{\frac{10}{20} + \frac{90}{15}}$$

$$= \frac{100}{0 \cdot 5 + 6}$$

$$= \frac{100}{6 \cdot 5}$$

$= 15 \cdot 38$ மைல்கள் (ஒரு காலனுக்கு)

மாதிரி 131

ஒருவர் ஒரு நகரிலிருந்து மற்றொரு நகருக்குச் செல்கிறார் அந்த இரண்டு நகரங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் 4 மைல்கள்.

அவர் மணிக்கு 40 மைல் வேகத்தில் தம்முடைய கார்மூலம் முதல் ஒரு மைலைக் கடக்கிறார். கார் நின்று விடவே, அடுத்த 1·5 மைல்களைக் குதிரை வண்டி மூலம் மணிக்கு 10 மைல் வேகத்தில் கடக்கிறார். மீதமுள்ள தூரத்தைக் குதிரை வண்டியை விட்டுவிட்டு மணிக்கு 4 மைல் வேகத்தில் நடந்து கடக்கிறார். அவருடைய சராசரி வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

(பி.காம்.—திருவனந்தபுரம்—1961)

தீர்வு :

அம் மனிதரின் வேகம் காண நிறையிட்ட இசைச் சராசரியைக் கணக்கிட வேண்டும்.

ஆகவே, மனிதரின் வேகம்
$$= \frac{1 + 1{\cdot}5 + 1{\cdot}5}{\left[\left(\frac{1}{40} \times 1\right) + \left(\frac{1}{10} \times 1{\cdot}5\right) + \left(\frac{1}{4} \times 1{\cdot}5\right)\right]}$$

$$= \left(\frac{4}{\frac{1+6+15}{40}}\right)$$

$$= \frac{40 \times 4}{22}$$

$$= \frac{160}{22}$$

$= 7{\cdot}27$ மைல்கள்/மணிக்கு.

மாதிரி 132

100 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்கள் 40 எனக் கணக்கிடப்பட்டது. பின்பு 53 என்ற மதிப்பெண் 83 எனத் தவறுதலாகப் பதியப்பட்டுள்ளது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. சரி செய்யப்பட்ட மதிப்பெண்ணுக்குச் சரியான கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1963)

தீர்வு :

100 மாணவர்கள் எடுத்த மொத்த மதிப்பெண்கள் $= 100 \times 40$

$= 4000$

தவறுதலாகக் கொண்ட மதிப்பெண் $= 83$

சரியாகக் கொள்ளவேண்டிய மதிப்பெண் = 53

ஆகவே, 100 மாணவர்கள் எடுத்த சரியான மொத்த மதிப்பெண்கள் } = 4000—83+43

= 3970

∴ சரி செய்யப்பட்ட பின்பு 100 மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்கள் } $= \frac{3970}{100}$

= 39·70 மதிப்பெண்கள்

மாதிரி 133

கீழ்க்காணும் அலைவெண் பட்டியலுக்கு இடைநிலை, முகடு ஆகியவற்றைக் காண்.

வருமானம் இரண்டுக்கும் மத்தியில்—ரூபாயில்		ஆட்களின் எண்ணிக்கை
100-க்கும்	200-க்கும்	15
100-க்கும்	300-க்கும்	33
100-க்கும்	400-க்கும்	63
100-க்கும்	500-க்கும்	83
100-க்கும்	600-க்கும்	100

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1963)

தீர்வு :

இடைநிலை, முகடு கணக்கிடல்:

வருமானம் (ரூபாயில்)	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$
100—200	15	15
200—300	18	33
300—400	30	63
400—500	20	83
500—600	17	100

(1) இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு அல்லது

$\left(\frac{100+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 50{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

(50·5) என்ற உறுப்பின் மதிப்பு '300—400' என்ற பிரிவின் கீழ் வருகிறது.

ஆகவே,
$$M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)-m}{f} \times C$$

$$= 300 + \frac{505-33}{30} \times 100$$

$$= 300 + \frac{17{\cdot}5 \times 100}{30}$$

= ரூ. 358·33

முகடு,
$$M_o = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$$

$$= 300 + \frac{30-18}{60-18-20} \times 100$$

$$= 300 + \frac{12 \times 100}{22}$$

$$= 300 + 54{\cdot}55$$

= ரூ. 354·55

மாதிரி 134

கீழ்வரும் பட்டியலில் ஒரு நகரிலுள்ள 600 வீடுகளின் 10% ராண்டம் மாதிரியாகத் தொகுத்தளிக்கப்பட்டவைகளின் மதிப்பும் (100 ரூபாய்களாக) புள்ளி விவரமும் தரப்பட்டுள்ளன.

(*i*) முகடு கணக்கிடுக.

(*ii*) ஒவ்வொரு 100 ரூபாய் மதிப்பிற்கு ஒரு ரூபாய் என்று சீராக ஒவ்வொரு வீட்டிற்கும் வரி போட்டால் வரி வருவாய் எவ்வளவு கிடைக்கும் என மதிப்பிடுக.

(*iii*) வீடுகளின் மதிப்பை ஏறுவரிசையில் எழுதி, குறைந்த மதிப்புடைய 40% வீடுகள் வரி விதிப்பிலிருந்து நீக்கப் பட்டால், வரி நீக்கம் செய்யப்பட வேண்டிய மதிப்பின் அளவு என்ன ?

மதிப்பு (100 ரூபாய் களாக)	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
வீடுகளின் எண்ணிக்கை	42	69	85	103	137
மதிப்பு (100 ரூபாய் களாக)	50—60	60—70	70—80	80—90	
வீடுகளின் எண்ணிக்கை	72	39	31	22	

(சென்னைப் பல்கலை—1944)

தீர்வு :

(1) முகடு $M_o = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$

$$= 40 + \frac{137 - 103}{(2 \times 137) - 103 - 72} \times 10$$

$$= 40 + 3{\cdot}43$$

= 43·43 நூறு ரூபாய்கள்

= ரூ 4,343

வரி வருவாயைக் கணக்கிடல் :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு (x)	அலை வெண் (f)	பெருக்கல் fx	குவி அலை வெண் cf
0—10	5	42	210	42
10—20	15	69	1035	111
20—30	25	85	5221	196
30—40	35	103	3605	299
40—50	45	137	6165	436
50—60	55	72	3960	508
60—70	65	39	2535	547
70—80	75	31	2325	578
80—90	85	22	1870	600
மொத்தம்		600	23,830	

(ii) நூறு ரூபாய் மதிப்பிற்கு 1 ரூபாய் வரி என்ற விகிதத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வீடுகள் அனைத்திலிருந்தும் வசூலிக்க வேண்டிய வரி வருவாயின் மொத்தத் தொகை

$$= \Sigma_i fx$$

$$= \textbf{23,830} \text{ ரூபாய்கள்.}$$

(iii) முதல் 40% வீடுகள் [மதிப்பு ஏறுவரிசையில் அமைத்தால்] வரி விலக்குப் பெறவேண்டும். ஆகவே 40 ஆவது நூற்றுமானத்தைக் கணக்கிட வேண்டும்.

40 ஆவது நூற்றுமானம் $P_{40} = \dfrac{40\,(n+1)}{100}$ ஆவது அல்லது $\left[\dfrac{40\,(600+1)}{100}\right]$ ஆவது அல்லது 240·4 ஆவது வீட்டின் மதிப்பு. 240·4 ஆவது வீடு '30—40' என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே 40 ஆவது நூற்றுமானம் $P_{40} = l_1 + \dfrac{\dfrac{40(n+1)}{100} - m}{f} \times C$

$$= 30 + \frac{240{\cdot}4 - 196}{103} \times 10$$

$$= 30 + 4{\cdot}31$$

$$= 34{\cdot}31 \text{ (நூறு ரூபாய்கள்)}$$

∴ வரி விலக்கு அளிக்கப்படவேண்டிய வீட்டு மதிப்பு

= ரூ. 3431

மாதிரி 135

ஒரு ராண்டம் மாறியின் வெவ்வேறு மதிப்புகள் : x_1, x_2, x_3 ....x_n ஆகும்; அவைகளின் அலைவெண்கள் முறையே f_1, f_2, f_3, ...f_n ஆகும். $X = ax + b$ எனில், X-ன் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு காண்க.

(சென்னை—பல்கலை)

(i) கூட்டுச் சாரசரி கணக்கிடல் :

இங்கு, $X_i = ax_i + b;\ i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$

$$\therefore \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = a\,\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i b}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

அல்லது $\overline{X} = a\overline{x} + b$ ஆகும்.

$$(\because = \sum_{i=1}^{n} b = b\sum_{i=1}^{n} f_i = b_N \sum_{i=1}^{n} f_i = N)$$

ஆதலால் $\overline{x} = a\,\overline{x} + b$

இங்கு, சாதராண கூட்டுச் சராசரியை ($\overline{x}$ ஐ) x மாறியின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட்டு $X = ax+b$ என்ற டிரான்ஸ் பர்மேஷனைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிட்டுக் கண்டறியலாம்.

(ii) இடைநிலை :

மத்திய உறுப்பிற்குச் சரியான மாறியின் அளவே, இடைநிலை அளவாகும். இங்கு மூலத்தையும் அளவையும் மாற்றி $X = ax + b$ என்ற புதிய மாறியை அமைத்து அதன் இடைநிலையைக் கணக்கிட வேண்டும். இம் மாற்றத்தால், இடைநிலையாகிய மத்திய மதிப்பு அப்படியேதான் இருக்கிறது. ஆகவே, x மாறியின் இடைநிலையை மூலத்தையும் அளவையும் மாற்றி இடைநிலையாகக் கொள்கிறோம்.

ஆதலால், $X_{\text{Median}} = a\,X_{\text{Median}} + b$ ஆகும்.

(iii) முகடு

X-மாறியின் முகட்டை மேற்கண்ட விளக்கத்தின்படி கணக்கிடலாம்.

மாதிரி 136

ஒரு நேர்மறை மாறியின் (positive variate) கூட்டுச் சராசரிக் பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி ஆகியவை முறையே A, G, H எனில், $A \geqslant G \geqslant H$ என, சிறிய உதாரணங்கள் மூலம் மட்டும் நிறுவிக் காட்டு.

(சென்னை—பல்கலை)

தீர்வு :

நேர்மறை மாறியின் உறுப்புகள் எல்லாவற்றின் மதிப்பும் சமமென்றால் $A = G = H$.

நாம் 4, 4 என்ற சம மதிப்புடைய இரண்டு உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{4+4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

பெருக்குச் சராசரி $= \sqrt{4 \times 4} = 4$

இசைச் சராசரி $= \dfrac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \dfrac{2}{0{\cdot}5} = 4$

ஆகவே, இங்கு $A = G = H$ எனக் காண்கிறோம்.

(ii) மாற்று உறுப்புகளின் மதிப்பு மாற்றமாக இருக்கும் பொழுது

$$A > G > H$$

2, 4, 8 என்ற மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

பின்பு,

கூட்டுச் சாரசரி $A = \frac{\Sigma x}{n}$

$$= \frac{2+4+8}{3}$$

$$= \frac{14}{3} = \mathbf{4{\cdot}67}$$

பெருக்குச் சாரசரி $G = \left\{ x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots\ldots \times x_n \right\}^{1/n}$

$$= [2 \times 4 \times 8]^{\frac{1}{3}}$$

$$= (64)^{\frac{1}{3}} = 4$$

இசைச் சாரசரி $H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{x_n}}$

$$= \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{3}{7/8}$$

$$= \frac{3 \times 8}{7} = \mathbf{3{\cdot}43}$$

ஆகவே $4{\cdot}57 > 4 > 3{\cdot}43$

அல்லது $A > G > H$

எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 137

கீழ்க்காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு (i) கூட்டுச் சராசரி (ii) இடைநிலை (iii) முகடு

ஆகியவற்றைக் காண்.

பிரிவு	அலைவெண்	பிரிவு	அலைவெண்
1—5	·005	17—21	·326
5—9	·017	21—25	·248
9—13	·080	25—29	·088
13—17	·227	29—33	·009

(திருவனந்தபுரம் பல்கலை)

தீர்வு :

இங்கு, தசம பின்னத்தை 1000 ஆல் பெருக்கி அலைவெண்களை முழு எண்களாக மாற்றிச் சராசரிகள் கணக்கிடல் :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு (x)	அலை வெண் (f)	ஊகச் சராசரி $(A=15)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx'	பெருக்கல் fdx'	குவி அலை வெண் $c.f$
1— 5	3	5	—3	—15	5
5— 9	7	17	—2	—34	22
9—13	11	80	—1	—80	102
13—17	15	227	0	0	329
17—21	19	326	1	326	655
21—25	23	248	2	496	903
25—29	27	88	3	264	991
29—33	31	9	4	36	1000
மொத்தம்		1000		993	

(i) கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx'}{n} \times C$

$$= 15 + \frac{993}{1000} \times 4$$

$$= 15 + \frac{3972}{1000}$$

$$= 18{\cdot}972$$

(ii) இடை நிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right) r$-ஆவது அல்லது

$\left(\frac{1000+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது 500·5 ஆவது உறுப்பு மதிப்பு

500 5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு '17—21' என்ற பிரிவில் வருகிறது.

$$\text{ஆகவே இடைநிலை } M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - m}{f} \times C$$

$$= 17 + \frac{500{\cdot}5 - 329}{326} \times 4$$

$$= 19{\cdot}1 \text{ (தோராயமாக)}$$

$$\text{(iii) முகடு } M_0 = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$$

$$= 17 \times \frac{326 - 227}{652 - 227 - 248} \times 4$$

$$= 19{\cdot}24 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 138

ஒரு தொழிற்சாலையில் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு (ஓர் அலகு வேலையை)

(i) A என்பவர் 4 நிமிடங்களிலும்

(ii) B என்பவர் 5 நிமிடங்களிலும்

(iii) C என்பவர் 6 நிமிடங்களிலும்

(iv) D என்பவர் 10 நிமிடங்களிலும்

(v) E என்பவர் 12 நிமிடங்களிலும் முடித்தால்,

(a) மேற்கண்டவர்கள் நிமிடத்திற்குச் செய்து முடிக்கும் சராசரி வேலை அளவுகளின் (அலகுகளில்) எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடவும்.

(b) இவ் வீதத்தில் 6 மணிகள் வேலை நேரம் கொண்ட ஒரு நாளில் இவர்கள் எத்தனை அலகு வேலைகளை முடிப்பார்கள்?

(எம்.ஏ.—சென்னை—1961)

தீர்வு :

(a) ஓர் அளவு (அலகு) வேலையை முடிக்க எடுத்துக்கொண்ட சராசரி நேரம் மேற்கண்டவர்கள் எடுக்கும் நேரங்களின் இசைச் சராசரி மூலம் கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

$$\text{இசைச் சராசரி} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots \frac{1}{x_n}}$$

$$= 5/\tfrac{48}{60}$$

$$= 6\tfrac{1}{4} \text{ நிமிடங்கள்}$$

(1 அலகு வேலைக்கு)

ஓர் அலகு வேலை முடிய தேவைப்படும் நேரம் $= 6\frac{1}{4}$ நிமிடங்கள்

ஆகவே,

ஒரு நிமிடத்திற்கு முடிக்கப்படும் சராசரி வேலையின் அலகு $= 1/6\frac{1}{4}$

$= 1/\frac{25}{4}$

$= 4/25$

$= 0{\cdot}16$

(b) ஓர் அலகு வேலை முடியத் தேவைப்படும் சராசரி நேரம் $= 6\frac{1}{4}$ நிமிடங்கள்

6 மணி கொண்ட ஒரு நாள் $= 360$ நிமிடங்கள்

5 வேலையாட்கள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் (ஒரு நாளில் 6 மணி நேரம்) $= 360$ நிமிடங்கள் $\times 5$

$= 1800$ நிமிடங்கள்

ஆகவே,

$$\left.\begin{array}{r}\text{1800 நிமிடங்களில் ஆகும்}\\ \text{வேலைகளின் எண்ணிக்கை}\\ \text{(அலகுகளில்)}\end{array}\right\} = \frac{1800}{6\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1800 \times 4}{25}$$

$$= \mathbf{288} \text{ (அலகுகள்)}$$

ஒரு நாளில் (6 மணிகள் வேலை நேரம் கொண்ட ஒரு நாள்) மேற்கண்ட A, B, C, D, E என்ற ஐந்து வேலையாட்கள் முடிக்கும் வேலை அலகுகளின் எண்ணிக்கை = **288** (அலகுகள்)

மாதிரி 139

ஒரு நிறுவனத்தில் 285 ஆட்கள் வேலை செய்கின்றனர். அவர்களுக்கு மாதச் சம்பளம் ரூ. 100 லிருந்து ரூ. 200 வரை தரப்படுகிறது. ஒவ்வோர் இரண்டு ஆண்டுகளிலும் அவர்கள் ரூ. 20 ஐச் சம்பள உயர்வாகப் பெறுகிறுர்கள். கீழேயுள்ள வருவாய்ப் பட்டியலுக்கு

(i) கூட்டுச் சராசரி *(ii)* இடைநிலை *(iii)* முகடு ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி.

(iv) மொத்த மாதச் சம்பளக் கூடுதலையும் காண்.

வருவாய்ப் பட்டியல்

வருவாய் (ரூபாயில்)	வேலையாட்கள் எண்ணிக்கை
ரூ. 200 அல்லது அதற்குக் குறைவாக	20
ரூ. 180 அல்லது அதற்குக் குறைவாக	265
ரூ. 160 அல்லது அதற்குக் குறைவாக	225
ரூ. 140 அல்லது அதற்குக் குறைவாக	150
ரூ. 120 அல்லது அதற்குக் குறைவாக	90
ரூ. 100 அல்லது அதற்குக் குறைவாக	40

(சென்னைப் பல்கலை)

(நாகபுரி—1942)

தீர்வு :

இங்கு ரூ. 100, ரூ, 120, ரூ. 140, ரூ. 160, ரூ. 180, ரூ. 200 என்று ஆட்கள் சம்பளம் வாங்குகின்றார்கள். இடைப்பட்ட ரூபாய்ச் சம்பளம் ஒருவரும் வாங்கவில்லை. ஆகவே இப் பட்டியல் ஒரு தொடர்ச்சியற்ற குவி அலைவெண் பரவலைத் தருகிறது. சாதாரணத் தொடர்ச்சியற்ற அலைவெண் பரவலாக மாற்றி, கேட்டிருக்கும் சராசரிகளையும், மொத்த மாதச் சம்பளப் பட்டுவாடா ரூபாயையும் கணக்கிடுகிறோம்.

தொடர்ச்சியற்ற தொகுதிப் பரவல்

சம்பளம் (ரூபாயில்) (x)	ஆட்கள் எண்ணிக்கை (f)	பெருக்கல் $f \times x$	குவி அலைவெண் $c.f$
100	40	4,000	40
120	50	6,000	90
140	60	8,400	150
160	75	12,000	225
180	40	7,200	265
200	20	4,000	285
மொத்தம்	285	41,600	

(i) கூட்டுச் சராசரிச் சம்பளம் $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$

$$= \frac{41600}{285}$$

$$= \text{ரூ. } 145{\cdot}96$$

(ii) முகட்டுச் சம்பளம் M_o = ரூ. 160

(iii) இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{285+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது 143 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

(143) ஆவது ஆளின் சம்பளம் = ரூ. 40

ஆகவே, இடைநிலைச் சம்பளம் = ரூ. 140

(iv) ஒவ்வொரு மாதமும் சம்பளமாகக் கொடுக்கும் மொத்த ரூபாய்கள் $\Big\} = \Sigma fx$

= ரூ. 41,600

2. பரவல் அளவைகள்
(Measures of Dispersion)

ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு இடைவெளியில் வகுப்புகள் அல்லது அலைவெண்கள் (சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள்) சிதறி அல்லது பரவி அமைதலை, பரவல் (Dispersion) என்கிறோம்.

அப்பரவல் அளவை அல்லது சிதறல் அளவை அளந்தறியப் பயன்படுத்தப்படும் அளவை முறைகளை, பரவல் அளவைகள் (Measures of Dispersion) என்று அழைக்கிறோம். பரவல் அளவைகளின் முக்கிய அளவைகள் கீழ் வருமாறு :

(1) **வீச்சு முறை** (Range method)

(2) **அரை இடைக் கால்மான வீச்சு** (Semi inter quartile Range)

(அல்லது)

கால்மான விலக்கம் (Quartile deviation)

(3) **சராசரி விலக்கம்** Average deviation)

(4) **திட்ட விலக்கம்** (Standard deviation)

சூத்திரங்கள் (Formulae) :

(1) வீச்சு (Range)

ஒரு வரிசையிலுள்ள மிகப் பெரிய உறுப்புக்கும், மிகச் சிறிய உறுப்புக்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசமே வீச்சு எனப்படுகிறது. ஒரு வரிசையின் எண்களை ஏறு வரிசை மதிப்பிலோ அல்லது இறங்கு வரிசை மதிப்பிலோ வரிசைப்படுத்தினால், குறைந்த, கூடிய உறுப்புகள் முதலும் கடைசியுமான இடங்களைப் பெறுகின்றன. இந்த இரு கடைசி உறுப்புகளின் வித்தியாசமே வீச்சு (Range) எனப்படும்.

$$\text{அரை வீச்சு} = \frac{\text{பெரிய உறுப்பு} - \text{சிறிய உறுப்பு}}{2}$$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{\text{பெரிய உறுப்பு} - \text{சிறிய உறுப்பு}}{\text{பெரிய உறுப்பு} + \text{சிறிய உறுப்பு}}$$

(கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளில்)

(2) கால்மான விலக்கம் அல்லது அரை இடைக் கால்மான வீச்சு

கால்மான விலக்கம் (Q. D) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ (வெறும் அளவு)

இங்கு Q_1 = முதல் கால்மானம்

Q_3 = மூன்றாவது கால்மானம்

கால்மான விலக்கக் கெழு $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

(3) சராசரி விலக்கம்
(Mean or Average Deviation)

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து அல்லது இடைநிலையில் இருந்து அல்லது முகட்டிலிருந்து கிடைக்கும் உறுப்புகள் அல்லது அலைவெண்களின் விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியே சராசரி விலக்கமாகும்.

(a) சராசரி விலக்கம் $\delta_{\bar{x}}$ (கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$-லிருந்து)

$$= \frac{\Sigma |d_{\bar{x}}|}{n}$$

இங்கு n என்பது புள்ளி விவரங்களின் எண்ணிக்கையாகும்.

சராசரி விலக்கக் கெழு (கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$-லிருந்து) $= \frac{\delta_{\bar{x}}}{\bar{x}}$

(b) சராசரி விலக்கம் $[\delta_{M_e}]$ (இடைநிலை M_e-லிருந்து

$$= \frac{\Sigma |d_{M_e}|}{n}$$

இங்கு, n என்பது புள்ளி விவரங்களின் (உறுப்புகளின்) எண்ணிக்கையாகும்.

சராசரி விலக்கக் கெழு (இடை நிலையிலிருந்து)

$$= \frac{\delta_{M_e}}{M_e}$$

இங்கு, M_e என்பது இடைநிலையாகும்.

(c) சராசரி விலக்கம் δ_{M_o} (முகட்டடியிலிருந்து)

$$= \frac{\Sigma \mid d_{M_o} \mid}{n}$$

இங்கு, n என்பது புள்ளி விவரங்களின் எண்ணிக்கையாகும்.

M_o என்பது முகடாகும்.

சராசரி விலக்கக் கெழு (முகட்டிலிருந்து)

$$= \frac{\delta_{M_o}}{M_0}$$

இங்கு, M_0 என்பது முகடாகும்.

தொடர்ச்சியற்ற தொகுதியின் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma f \mid d \mid}{\Sigma f}$$

இங்கு, $|d|$ = எடுத்துக்கொண்ட சராசரியில் இருந்து நேரிடைக் குறி கொண்டு, கணக்கிடப்படுகின்ற விலக்கங்களாகும்.

சராசரி விலக்கத்தை முதல் மோமெண்ட் பரவல் எண் எனக் கூறலாம்.

சுருக்கு வழி முறையில் சராசரி விலக்கம் கணக்கிடல் :

இங்கு,

m = கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலை அல்லது முகடு.

p = எடுத்துக்கொண்ட சராசரிக்குக் குறைவான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

S_1 = எடுத்துக்கொண்ட சராசரிக்குக் குறைவான உறுப்புகளின் கூட்டல்.

q = எடுத்துக்கொண்ட சராசரிக்கு அதிகமான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

S_1 = எடுத்துக்கொண்ட சராசரிக்கு அதிகமான உறுப்புகளின் கூட்டல்

எனக் கொண்டால்,

m-லிருந்து கண்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{S_2 - S_1 + m\ (p - q)}{n}$$

இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் கணக்கிடப்படும் பொழுது $p = q$ என இருக்கிறது. ஆகவே, இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{S_2 - S_1}{n}$$

கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலை அல்லது முகட்டிலிருந்து கணக்கிடப்படும் (தொடர்ச்சியற்ற அல்லது தொடர் தொகுதி) சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma f d_x + \text{மொத்தப் பிழை}}{n}$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{சராசரி விலக்கம் (கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து)}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$$

இடை நிலையிலிருந்து கிடைத்த சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{சராசரி விலக்கம் (இடை நிலையிலிருந்து)}}{\text{இடை நிலை}}$$

முகட்டிலிருந்து கிடைத்த சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{சராசரி விலக்கம் (முகட்டிலிருந்து)}}{\text{முகடு}}$$

(4) திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation)

திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கச் சராசரியின் வர்க்கமூலம் ஆகும். தொகுதி

யின் சராசரிக்கும், உறுப்பு மதிப்புகளுக்குமிடையேயுள்ள நேரிடை, எதிரிடை ஆகிய வித்தியாசங்களை வர்க்கப்படுத்திஞல் அனைத்தும் நேரிடை மதிப்புகளாகிவிடும். இவற்றைச் சராசரிப்படுத்தி வர்க்க மூலம் கண்டால் கிடைப்பது திட்ட விலக்கமாகும்.

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$$

இங்கு,

n = வரிசையில் கொடுக்கப்பட்ட உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$\bar{x}$ = கூட்டுச் சராசரி

ஊகச் சராசரி A-லிருந்து கிடைத்த விளக்கங்களை d எனக் குறித்தால் மேற்கண்ட சூத்திரத்தைக் கீழ்க் காணுமாறு எழுதலாம்.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - (\bar{x}-A)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2} \quad \text{(சுருக்கு முறை)}$$

தொடர் வரிசை

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{\Sigma f}} \quad \text{(நேர் முறை)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{\Sigma f} - (\bar{x}-A)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f d}{\Sigma f}\right)^2} \quad \text{(சுருக்கு முறை)}$$

கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலில் பிரிவு இடைவெளிகளின் இடையே உள்ள இடைவெளிகள் சமமாக இருந்தால் திட்ட விலக்கம் கணக்கிடும்பொழுது படிவிலக்க முறையையே (Step (Deviation Method) பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\text{ஆகவே, } \sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f d'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f d'}{\Sigma f}\right)^2} \quad \text{(படி விலக்க முறை)}$$

இங்கு,

c = சீரான பிரிவுகளின் இடைவெளியின் மதிப்பு

$$d' = \frac{d}{c} = \frac{(x-A)}{c}$$

A = ஊகச் சராசரி (origin)

சார்லியர் சோதனை :

இதை, திட்ட விலக்கத்தைப் பிழையின்றிக் கணக்கிடப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\Sigma f(dx+1)^2 - \Sigma f dx^2 - 2\Sigma f dx = N$$

மாறுவிகிதக் கெழு :

மாறுவிகிதக் கெழு காணலை முதலில் 'பேராசிரியர் கார்ல் பியர்சன்தான் பயன்படுத்தினார். இதைச் 'சராசரியின் சதவீத மாறுபாடு' எனக் கூறினார்.

$$\text{மாறுவிகிதக் கெழு} = \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} \times 100$$

மாறுபாடு அல்லது இரண்டாவது விலக்க விசைப் பெருக்கச் சராசரி (Moments) = (திட்ட விலக்கம்)$^2 = \sigma^2$

$$= \frac{\Sigma f d^2}{n}$$

ஆகவே, மாறுபாடு என்பது திட்ட விலக்கத்தின் வர்க்கமாகும். அல்லது இதைக் கூட்டுச் சராசரியின் மேற்கண்ட இரண்டாவது மோமெண்ட் எனவும் கொள்ளலாம்.

ஒன்று சேர்ந்த வரிசைகளின் அல்லது பொதுத் திட்ட விலக்கம் :

இங்கு,

σ_{12} = இரண்டு வரிசைகள் கலந்த ஒரே வரிசையின் திட்ட விலக்கம்

σ_1 = முதல் வரிசையின் திட்ட விலக்கம்

σ_2 = இரண்டாம் வரிசையின் திட்ட விலக்கம்

$\bar{x}_1$ = முதல் வரிசையின் கூட்டுச் சராசரி

$\bar{x}_2$ = இரண்டாம் வரிசையின் கூட்டுச் சராசரி

$\bar{x}$ = ஒன்று சேர்ந்த வரிசைகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

n_1 = முதல் வரிசை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

n_2 = இரண்டாம் வரிசை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை எனக் கொண்டால்

$$\sigma = \sigma_{12} = \sqrt{\frac{n_1\sigma_1^2 + n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2\sigma_2^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n_1 + n_2}}$$

ஆகும்.

இதன்படி,

$n_1\ n_2\ n_3 \ldots$ முறையே ஒவ்வொரு வரிசைகளின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 \ldots$ முறையே ஒவ்வொரு வரிசைகளின் திட்ட விலக்கங்கள்

$d_1\ d_2\ d_3 \ldots$ முறையே ஒவ்வொரு வரிசைகளின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் பொதுக் கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள வித்தியாசங்கள்

எனக் கொண்டால்,

பொதுத் திட்ட விலக்கம் $= \sigma =$

$$\sqrt{\frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_3\sigma_3^2 \ldots\ldots + n_1d_1^2 + n_2d_2^2 + n_3d_3^2 \ldots\ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots}}$$

எடுத்துக்கொண்ட இரு மாதிரிகளின் தனித் தனியாகக் கண்டறிந்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முறையே n_1, n_2-க்கள் சமமாகவும், இரு கூட்டுச் சராசரிகளும் முறையே $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$-க்கள் சமமாகவும் இருந்தால்,

இரு மாதிரிகளின் பொதுத் திட்ட விலக்கம்

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$$

கினியின் சராசரி விலக்கங்கள் :

கொடுக்கப்பட்ட சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை அளப்பதற்குப் பதிலாக, கினி என்பவர் கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள வித்தியாசங்களின் கூட்டுச் சராசரியைத்

கணக்கிட்டார். இம்முறையில் ஒரு நல்ல பரவல் அளவையைக் கணக்கிடலாம் என்று கூறினார்.

கினியின் விலக்கங்களின் சராசரி $= \frac{g}{m}$.

இங்கு,

g = கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி மாறிகளின் விலக்க மொத்தம்

m = விலக்கங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை.

$\frac{1}{2} N(N-1)$ = மொத்த விலக்கங்களின் எண்ணிக்கை,

மாடுலஸ் (Modulus) $= \sqrt{\frac{2\,\Sigma f dx^2}{n}} = \sigma\sqrt{2}$

திட்டம் (Precision) $= \frac{1}{\sqrt{\frac{2\,\Sigma f dx^2}{n}}}$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\text{மாடுலஸ்}}$$

ஏற்றயிறக்கம் $= \frac{2\,\Sigma f dx^2}{n}$ (மாடுலசின் வர்க்கம்)

பரவல் அளவைகளுக்கு இடையிலான உறவுகள் :

(இயல் நிலைப் பரவலுக்கு மட்டும்)

(1) சராசரிப் பரவல் $= \frac{4}{5}$ திட்ட விலக்கம்

(2) கூட்டுச் சராசரி $\pm \sigma$ = 67% உறுப்புகள்

(3) கூட்டுச் சராசரி $\pm 2\sigma$ = 95% உறுப்புகள்

(4) கூட்டுச் சராசரி $\pm 3\sigma$ = 99% உறுப்புகள்

(5) வீச்சு = 4 அல்லது 5 மடங்கு திட்ட விலக்கம்

(6) கால்மான விலக்கம் $= \frac{2}{3}$ திட்ட விலக்கம்

(7) கால்மான விலக்கம் $= \frac{5}{6}$ சராசரி விலக்கம்

(8) இடைநிலை $\pm$ கால்மான விலக்கம் $\}$ = 50% உறுப்புகள்

(9) ஊகப் பிழை = $0{\cdot}6745\sigma$

(10) கூட்டுச் சராசரி $\pm$ 2 ஊகப் பிழை $\}$ = 50% உறுப்புகள்

(11) கூட்டுச் சராசரி $\pm$ 3 ஊகப் பிழை $\}$ = 99% உறுப்புகள்

(12) ஊகப் பிழை = கால்மான விலக்கம் அல்லது $\frac{2}{3}\sigma$

வீச்சு
(Range)

மாதிரி 140

ஒரு குழுவிலுள்ள ஒன்பது பேர்களின் ஆண்டு வருவாய்கள் கீழ் வருமாறு : அக்குழுவின் வீச்சு என்ன ?

ரூபாய்கள் 7520, 6530, 5020, 6230, 7320, 8200, 7800, 5750, 6900.

தீர்வு :

வீச்சு = மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு — மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு.

$\therefore$ வீச்சு = ரூ. 8500 – ரூ. 5000 = ரூ. 3500 ஆகும்.

மாதிரி 141

கீழ் உள்ளவை ஒரு மாணவர் ஏழு பாடங்களில் எடுத்த மதிப்பெண்களாகும். வீச்சுப் பரவலையும், வீச்சுக் செழுவையும் கணிக்கவும்.

மதிப்பெண்கள் : 55, 65, 43, 35, 20, 75, 80.

தீர்வு :

வீச்சு = மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு — மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு.

$\therefore$ வீச்சு = 80—20 = 60 (மதிப்பெண்கள்)

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{\text{மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு} - \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}{\text{மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு} + \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}$$

$$= \frac{80-20}{80+20} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

$$= 0{\cdot}6$$

மாதிரி 142

கீழ்க் காணும் பரவலுக்கு வீச்சையும் வீச்சுக் கெழுவையும் காண்க.

கூலி (ரூபாயில்)	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	கூலி (ரூபாயில்)	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை
5	35	10	72
6	45	11	65
7	55	12	50
8	47	13	35
9	58	14	25

தீர்வு :

வீச்சு = மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு—மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு.

$\therefore$ வீச்சு $= 15-5=10.$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{\text{மிகப் பெரிய உறுப்புன் மதிப்பு} - \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}{\text{மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு} + \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}$$

$$\therefore \text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{15-5}{15+5} = \frac{10}{20} = 0{\cdot}5$$

மாதிரி 143

கீழ்க் காணும் அட்டவணையிலிருந்து வீச்சையும் வீச்சுக் கெழுவையும் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை
10	26	15	310
11	201	16	80
12	673	17	13
13	100	18	1
14	739		

தீர்வு ;

வீச்சு = மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு – மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு

∴ வீச்சு = $18 - 10 = 8$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{\text{மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு} - \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}{\text{மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு} + \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}$$

$$\therefore \text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{18-10}{18+10} = \frac{8}{28}$$

$= 0{\cdot}28$ (தோராயமாக)

மாதிரி 144

200 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களைக் கொடுக்கும் கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு வீச்சையும் வீச்சுக் கெழுவையும் கணக்கிடு.

மதிப்பெண்கள்	5—15	15—25	25—35	35—45
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	3	12	23	35
மதிப்பெண்கள்	45—55	55—65	65—75	75—85
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	65	30	23	10

தீர்வு :

வீச்சு = மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு — மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு

∴ வீச்சு = 85—15 = 70.

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{\text{மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு} - \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}{\text{மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு} + \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}$$

$$\therefore \text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{85-15}{85+15} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

$$= 0{\cdot}7.$$

மாதிரி 145

கீழ்க் காணும் அட்டவணை 100 மனிதர்களின் எடைகளைத் தருகிறது. பரவலையும் பரவல் கெழுவையும் வீச்சு முறையில் கணக்கிடு.

மனிதர்களின் எடை (பவுண்டில்)		மனிதர்களின் எடை (பவுண்டில்)	
பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
85— 95	4	145—155	17
95—105	13	155 - 165	9
105—115	8	165—175	8
115—125	10	175—185	2
125—135	9		
135—145	16		100

தீர்வு :

எடை (பவுண்டில்)	மத்திய மதிப்பு	அலைவெண்
85— 95	90	4
95—105	100	13
105—115	110	8
115—125	120	14
125—135	130	9
135—145	140	16
145—155	150	17
155—165	160	9
165—175	170	8
175—185	180	2 | 100

வீச்சு = மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு — மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு

∴ வீச்சு (பரவல்) 185—85 = 100.

வீச்சுக்கெழு

$$= \frac{\text{மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு} - \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}{\text{மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு} + \text{மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு}}$$

$$\therefore \text{ வீச்சுக் கெழு} = \frac{185-85}{185+85} = \frac{100}{270} = \frac{10}{27}$$

$$= 0{\cdot}27.$$

மாதிரி 146

கீழ்க் காணும் அட்டவணையிலிருந்து வீச்சின் சார்புப் பரவல்களைக் கணக்கிடு.

மதிப்பெண்கள்	10—20	20—30	30—40	40—50
அலைவெண்கள்	5	8	15	7
மதிப்பெண்கள்	50—60	60—70	70—80	
அலைவெண்கள்	3	1	1	

தீர்வு:

மதிப் பெண்கள்	மத்திய மதிப்பு (x_i)	அலை வெண் (f)	குவி அலைவெண் $(c.f)$	$f\,x$
10—20	15	5	5	75
20—30	25	8	13	200
30—40	35	15	28	525
40—50	45	7	35	315
50—60	55	3	38	165
60—70	65	1	39	65
70—80	75	1	40	75
		$n=40$		$\Sigma fx=1420$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{1420}{40} = 35{\cdot}5$$

$$\text{இடைநிலை எண்} = \frac{n+1}{2} = \frac{40+1}{2} = 20{\cdot}5$$

இந்த எண் (30—40) என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

$$\text{இடைநிலை} = l_1 + \frac{\left[\frac{(n+1)}{2} - c\right]}{f} \times i$$

$$= 30 + \frac{[20 \cdot 5 - 13]}{15} \times 10$$

$$= 30 + \frac{7 \cdot 5}{15} \times 10$$

$$= 35$$

மேற்கண்ட பரவலில் 15 என்பதே உயர்ந்த அளவு (பலமுறை நிகழ்கின்ற) அலைவெண் ஆகும். ஆதலால் (30—40) என்பதே முகட்டுப் பிரிவாகும்.

$$\text{முகட்டுச் சூத்திரம் } M_0 = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{(2f_1 - f_0 - f_2)} \times i$$

$$= 30 + \frac{(15-8)}{(30-8-7)} \times 10$$

$$= 30 + \frac{7}{15} \times 10$$

$$= 34 \cdot 7 \text{ (தோராயமாக)}$$

வீச்சு = மிகப் பெரிய உறுப்பின் மதிப்பு—மிகச் சிறிய உறுப்பின் மதிப்பு

$$= 80 - 10 = 70.$$

வீச்சின் சார்புப் பரவல் அளவைகள் :

(1) கூட்டுச் சராசரி $\overline{x}$ -லிருந்து கணக்கிட்ட வீச்சின் சார்பு அளவை

$$= \frac{(80-10)}{35 \cdot 5} = \frac{70}{35 \cdot 5} = 1 \cdot 97.$$

(2) இரு மடங்குக் கூட்டுச் சராசரி $(2\overline{x})$ யிலிருந்து கணக்கிட்ட வீச்சின் சார்பு அளவை

$$= \frac{80-10}{2 \times 35 \cdot 5} = \frac{70}{71} = 0 \cdot 986$$

(3) இடைநிலை (M_e) யிலிருந்து கண்ட வீச்சுச் சார்பு அளவை

$$= \frac{80-10}{35} = \frac{70}{35} = 2$$

(4) முகட்டிலிருந்து (M_o) கண்ட வீச்சுச் சார்பு அளவை

$$= \frac{80-10}{34 \cdot 7} = \frac{70}{34 \cdot 7} = 2 \cdot 02$$

(5) இறுதி நிலை மதிப்புகளின் மொத்தத்திலிருந்து கண்ட வீச்சுச் சார்பு அளவை (அல்லது வீச்சுக் கெழு)

$$= \frac{80-10}{80+10} = \frac{70}{90} = \mathbf{0 \cdot 78}.$$

கால்மான விலக்கம் அல்லது அரையிடைக் கால்மான வீச்சு (Quartile Deviation or Semi inter-quartile Range)

மாதிரி 147

கீழ் வரும் ஏழு மாணவர்களின் மதிப்பெண்களுக்கு, கால்மான விலக்கம், கால்மான விலக்கக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண். மதிப்பெண்கள் : 65, 45, 49, 42, 54, 51, 59.

தீர்வு :

கால்மான விலக்கம் காணல் :

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட மதிப்பெண்கள்
42
45
49
51
54
59
65

முதல் கால்மான விலக்கம் $Q_1 = \frac{(n+1)}{4}$

$$= \frac{7+1}{4}$$

$$= \frac{8}{4}$$

= 2 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 45 மதிப்பெண்கள்

2 ஆவது கால்மான விலக்கம் $Q_2 = M_e$ $\Big\} = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2}$

= 4 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 51 மதிப்பெண்கள்

3 ஆவது கால்மான விலக்கம் $\Big\} Q_3 = \frac{3 \times (n+1)}{4}$

$$= \frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4}$$

6 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 59 மதிப்பெண்கள்

கால்மான விலக்கம் $Q.\ D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{59-45}{2} = \frac{14}{2}$

$= 7.$

$\therefore$ கால்மான விலக்கம் = 7 மதிப்பெண்கள்.

கால்மான விலக்கக் கெழு $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{59-45}{59+45} = \frac{14}{104}$

$= 0{\cdot}134.$

$\therefore$ கால்மான விலக்கக் கெழு = 0·13.

மாதிரி 148

கீழ்க் காணும் 22 மாணவர்கள் புள்ளியியல் பாடத்தில் எடுத்துள்ள மதிப்பெண்களுக்குக் கால்மான விலக்கத்தைக் காண்.

20, 27, 40, 47, 10, 14, 30, 1, 42, 95, 55,
35, 91, 22, 7, 38, 44, 49, 95, 65, 52, 73

தீர்வு :

மேற்கண்ட மதிப்புகளை ஏறு வரிசையில் எழுதினால்

1, 7, 10, 14, 20, 22, 27, 30, 35, 38, 40,
42, 44, 47, 49, 52, 55, 65, 73, 91, 95, 95

என அமையும்.

இங்கு மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $n = 22$ ஆகும்.

முதல் கால்மான எண் $= \frac{n+1}{4}$ ஆவது மாணவனின் மதிப்பெண்

$= \left(\frac{22+1}{4}\right)$ ஆவது அல்லது $5\frac{3}{4}$ மாணவனின் மதிப்பெண்

$\therefore\ Q_1 = 20 + \frac{3}{4} \times (22-20)$

$= 21{\cdot}5.$

மூன்றாவது

கால்மான எண் $= \frac{3}{4} \times (n+1)$ ஆவது மாணவனின் மதிப்பெண்

$= \frac{3}{4} \times (22+1) = \frac{69}{4}$

$= 17{\cdot}25$ ஆவது மாணவனின் மதிப்பெண்

$\therefore \; Q_3 = 55 + \frac{1}{4} \times (65-55)$

$= 57{\cdot}5$

கால்மான விலக்கம் $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$\therefore$ கால்மான விலக்கம் $= \frac{57{\cdot}5 - 21{\cdot}5}{2}$

$= \mathbf{18.}$

மாதிரி 149

அரையிடைக் கால்மான வீச்சையும், கால்மானக் கெழுவையும் கீழ்க் காணும் அட்டவணைக்குக் கணக்கிடு :

தீர்வு :

வயது (வருடங்களில்)	உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை	குவி அலைவெண்
20	3	3
30	61	64
40	132	196
50	153	349
60	140	489
70	51	540
80	3	543

முதல் கால்மானம்

$Q_1 = \frac{n+1}{4}$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= \left(\frac{543+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு (அல்லது)

136 ஆவது உறுப்பினரின் வயது $= 40$ வருடங்கள்

மூன்றாவது கால்மானம்

$$Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

அல்லது $3\left(\frac{543+1}{4}\right)$ அல்லது 408

ஆவது உறுப்பினரின் வயது

$= 60$ வருடங்கள்.

அரையிடைக்

கால்மான வீச்சு $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{60-40}{2} = 10.$$

கால்மான

விலக்கக் கெழு $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{60-40}{60+40}$$

$$= \frac{20}{100}$$

$$= 0{\cdot}2$$

மாதிரி 150 :

கீழ்க் காணும் அட்டவணையிலுள்ள விவரங்களுக்கு அரையிடைக் கால்மான வீச்சையும் அதனின் கால்மான விலக்கக் கெழுவையும் காண்.

மதிப் பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மதிப் பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0—4	4	8—12	12
4—6	6	12—18	7
6—8	8	18— 20	2

தீர்வு :

குவி அலைவெண் அட்டவணை

மதிப்பெண்கள்	அலைவெண்	குவி அலைவெண்
0—4	4	4
4—6	6	10
6—8	8	18
8—12	12	30
12—18	7	37
18—20	2	39
	$n = 39$	

முதல் கால்மானம் $Q_1 = \frac{(n+1)}{4}$ ஆவது மாணவனின் மதிப்பெண்

$= \left(\frac{39+1}{4}\right)$ ஆவது அல்லது 10ஆவது மாணவனின் மதிப்பெண்

10 ஆவது மாணவன் (4—6) என்ற பிரிவில் இருக்கின்றான்.

முதல் கால்மானச் சூத்திரம் $Q_1 = l_1 + \dfrac{\frac{(n+1)}{4} - c}{f} \times i$

$$Q_1 = 4 + \frac{(10-4)}{6} \times (6-4)$$

$= 4+2=6$ மதிப்பெண்கள்

மூன்றாவது கால்மானம் $= 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது மாணவனின் மதிப்பெண்

$= 3 \times \frac{40}{4} = 30$ஆவது மாணவனின் மதிப்பெண்

30 ஆவது மாணவனின் மதிப்பெண் (8 – 12) என்ற பிரிவில் இருக்கிறது.

$$\therefore \text{மூன்றாவது கால்மானச் சூத்திரம்} = l_1 + \frac{3\left(\frac{n+1}{4}\right) - C}{f} \times i$$

$$Q_3 = 8 + \frac{(30-18)}{12} \times (12-8)$$

$$= 8+4 = 12 \text{ மதிப்பெண்கள்.}$$

$$\text{அரையிடைக் கால்மான வீச்சு} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{12-6}{2} = 3 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

$$\text{கால்மான விலக்கக் கெழு} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{12-6}{12+6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$= 0{\cdot}33 \text{ மதிப்பெண்கள்.}$$

மாதிரி 151

கீழ்க் காணும் பரவலுக்குக் கால்மானங்களையும், கால்மான விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக :

வயது x	அலைவெண் f	வயது x	அலைவெண் f
0— 5	1720	40—45	514
5—10	1331	45—50	393
10—15	1223	50—55	335
15—20	930	55—60	235
20—25	864	60—65	187
25—30	754	65—70	97
30—35	709	70—அதற்கு மேல்	120
35—40	587		

(அண்ணாமலை —1942

தீர்வு :

குவி அலைவெண் பரவல் கண்டு கணக்கிடுக :

வயது x	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$
0—5	1720	1720
5—10	1331	3051
10—15	1223	4274
15—20	930	5204
20—25	864	6068
25—30	754	6822
30—35	709	7531
35—40	587	8118
40—45	514	8632
45—50	393	9025
50—55	335	9360
55—60	235	9595
60—65	187	9782
65—70	97	9879
70—அதற்கு மேல்	120	9999

இப் பட்டியலில் $n = 9999$

$$\therefore \left(\frac{n+1}{4}\right) = \frac{10000}{4} = 2500$$

$$3\left(\frac{n+1}{4}\right) = \frac{30000}{4} = 7500$$

ஆகவே 2500 என்ற எண் (5—10) என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

முதல் கால்மானச் சூத்திரம் $Q_1 = l_1 + \dfrac{\left(\frac{n+1}{4}\right) - C}{f} \times i$

$$Q_1 = 5 + \frac{(2500-1720)}{1331} \times 5$$

$$= 7{\cdot}9$$

இங்கு 7500 என்ற எண் (30—35) என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே, மூன்றாவது கால்மானம் $Q_3 = l_1 + \dfrac{3\left(\dfrac{n+1}{4}\right) - c}{f} \times i$

$$Q_3 = 30 + \frac{(7500-6822)}{709} \times 5$$

$$= \mathbf{34{\cdot}8}$$

கால்மானவிலக்கச் சூத்திரம் $Q.D. = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$\therefore Q.D. = \frac{34{\cdot}8-7{\cdot}9}{2}$$

$$= \mathbf{13{\cdot}45}$$

மாதிரி 152

பின்வரும் வாரச் சம்பள நிகழ்வெண் பவரலில் கால்மான இடைவெளிப் பாதியை ($Q{\cdot}D.$) காண்க :

வாரச் சம்பளம் (ரூபாயில்)	40—43	43—46	46—49	49—52
அலைவெண்	4	15	27	36
வாரச் சம்பளம் (ரூபாயில்)	52—55	55—58	58—61	61—64
அலைவெண்	24	18	9	7

(பி·ஏ.—மதுரை—1971)

தீர்வு :

கால்மான இடைவெளிப் பாதியைக் கணித்தல் :

வாரச் சம்பளம் (ரூபாயில்)	அலைவெண் f	திரள் அலைவெண் $c.f$
40—43	4	4
43—46	15	19
46—49	27	46
49—52	36	82
52—55	24	106
55—58	18	124
58—61	9	133
61—64	7	140

முதல்

கால்மானம் $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{140+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= (35 \cdot 25)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$(35 \cdot 25)$ ஆவது உறுப்பு $(46-47)$ என்ற பிரிவின் கீழ் வருகிறது.

ஆகவே, முதல் கால்மானம் $Q_1 = l_1 + \dfrac{\left(\frac{n+1}{4}\right) - C}{f} \times i$

$$= 46 + \frac{35 \cdot 25 - 19}{27} \times 3$$

$$= 46 + \frac{16 \cdot 25 \times 3}{27}$$

$= 47 \cdot 08$ (தோராயமாக)

மூன்றும்

$$\text{கால்மானம் } Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= 3\left(\frac{140+1}{4}\right) \text{ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

$$= 105{\cdot}75\text{-ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு}$$

105·75-ஆவது உறுப்பு (52—55) என்ற பிரிவின் கீழ் வருகிறது.

ஆகவே, மூன்றும்

$$\text{கால்மானம் } Q_3 = 52 + \frac{105{\cdot}75-82}{24} \times 3$$

$$= 52 + \frac{23{\cdot}75 \times 3}{24}$$

$$= 52 + 2{\cdot}97$$

$$= \mathbf{54{\cdot}97}$$

கால்மான இடை

$$\text{வெளிப் பாதி } Q_1 D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{54{\cdot}97 - 47{\cdot}8}{2}$$

$$= \mathbf{3{\cdot}585}$$

மாதிரி 153

ஒரு சமயத்தில் இங்கிலாந்து நாட்டின் பார்லிமெண்டில் பிரபுக்கள் சபையில் இருந்தவர்களின் வயதுப் பரவல் வருமாறு :

மைய ஆண்டுகள் x	20	30	40	50	60	70	80
அலைவெண் f	3	61	132	153	140	51	2

திட்ட விலக்கத்தையும், கால்மான விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

(சென்னைப் பல்கலை)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கத்தையும், கால்மான விலக்கத்தையும் கணக்கிடல் :

x	f	குவி அலை வெண் $c.f$	ஊகச் சராசரி ($A=50$) யிலிருந்து படி விலக்கம் $d'x$	$fd'x$	$fd'x^2$
20	3	3	−3	−9	27
30	61	64	−2	−122	244
40	132	196	−1	−132	132
50	153	349	0	0	0
60	140	489	1	140	140
70	51	540	2	102	204
80	2	542	3	6	18
மொத்தம்	542			−15	765

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'x^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'x}{\Sigma f}\right)} \times C$

$= \sqrt{\frac{765}{542} - \left(\frac{15}{542}\right)} \times 10$

$= 11{\cdot}6$ (தோராயமாக)

கால்மான விலக்கம் கணக்கிடல் :

முதல் கால்மானம் $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{765+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 136$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 50$ வயது.

மூன்றும்

கால்மானம் $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 3\left(\frac{765+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 408$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 60$ வயது.

ஆகவே, கால்மான விலக்கம் $Q.D. = \frac{Q_3-Q_1}{2}$

$= \frac{60-50}{2}$

$= 5.$

மாதிரி 154

கீழ்க் காணும் அட்டவணையில் தரப்பட்ட கூலிகளுக்குக் கால் மான விலக்கத்தையும் கால்மான விலக்கக் கெழுவையும் கணக் கிடுக.

கூலி (ரூபாயில்)	30—32	32—34	34—36	36—38
கூலியாட்கள்	12	18	16	14

கூலி (ரூபாயில்)	38—40	40—42	42—44
கூலியாட்கள்	12	8	6

(ஆக்ரா—எம்.எஸ்ஸி.—1949)

தீர்வு :

கால்மான விலக்கத்தையும் கால்மான விலக்கக் கெழுவையும் கணக்கிடல் :

கூலி (ரூபாயில்)	கூலியாட்கள் f	குவி அலைவெண் $c.f$
30—32	12	12
32—34	18	30
34—36	16	46
36—38	14	60
38—40	12	72
40—42	8	80
42—44	6	86
	$n=86$	

முதல் கால்மான எண் $= \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{86+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 21{\cdot}75$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

21·75 என்ற எண் (32—34) என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

முதல் கால்மானச் சூத்திரம் $Q_1 = l_1 + \dfrac{\frac{n+1}{4} - C}{f} \times i$

$$= 32 + \frac{(21{\cdot}75-12)}{18} \times 2$$

$$= 32 + \frac{9.75}{18} \times 2$$

$$= 32 + 1.08.$$

$$= \mathbf{33.08.}$$

மூன்றாவது கால்மான எண் $= 3\left(\frac{n+1}{4}\right) = 3 \times \frac{(86+1)}{4}$

$$= 65.25$$

இந்த எண் (38—40) என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

மூன்றாவது கால்மானச் சூத்திரம் $Q_3 = l_1 + \dfrac{3\left(\frac{n+1}{4}\right) - C}{f} \times i$

$$Q_3 = 38 + \frac{65.25 - 16}{12} \times 2$$

$$= 38 + \frac{5.25}{12} \times 2$$

$$= 38 + 0.875$$

$$= \mathbf{38.875}$$

கால்மான விலக்கம் $Q.D.$ $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{38.875 - 33.08}{2}$$

$$= \frac{5.795}{2} = 2.897$$

கால்மான விலக்கக் கெழு $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{38.875 - 33.08}{38.875 + 33.08}$$

$$= \frac{5.795}{71.955}$$

$$= \mathbf{0.08.}$$

மாதிரி 155

கீழ்க் காணும் பரவலுக்குக் கால்மான விலக்கத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

வயது (x)	11	12	13	14	15	16	17	18
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)	3	9	28	39	25	10	7	4

(பி. ஏ.—சென்னை—1971)

தீர்வு :

கால்மான விலக்கத்தைக் கணக்கிடல் :

வயது	வயதுப் பிரிவு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f	குவி எண்ணிக்கை $c.f.$
11	10·5—11·5	3	3
12	11·5—12·5	9	12
13	12·5—13·5	28	40
14	13·5—14·5	39	79
15	14·5—15·5	25	104
16	15·5—16·5	10	114
17	16·5—17·5	7	121
18	17.5—18·5	4	125

முதல் கால்மானம் $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது மாணவனின் வயது

$= \left(\frac{125+1}{4}\right)$ ஆவது மாணவனின் வயது

$= 31·5$ ஆவது மாணவனின் வயது

31·5 ஆவது மாணவன் (12·5—13·5) என்ற பிரிவு வயதில் இருக்கிறான்.

ஆகவே, முதல் கால்மானம் $Q_1 = l_1 + \dfrac{\left(\frac{n+1}{4}\right) - C}{f} \times i$

$= 12{\cdot}5 + \dfrac{(31{\cdot}5 - 12)}{28} \times 1$

$= 12{\cdot}5 + \dfrac{19{\cdot}5}{28}$

$= 12{\cdot}5 + 0{\cdot}696$

$= 13{\cdot}196.$

மூன்றாவது கால்மானம் $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது மாணவனின் வயது

$= 3\left(\frac{125+1}{4}\right)$ ஆவது மாணவனின் வயது

$= 94{\cdot}5$ ஆவது மாணவனின் வயது

94·5ஆவது மாணவனின் வயது (14·5—15·5) ஆவது பிரிவு வயதில் இருக்கிறது.

ஆகவே, மூன்றாவது கால்மானம் $Q_3 = l_1 + \dfrac{3\left(\frac{n+1}{4}\right) - C}{f} \times i$

$= 14{\cdot}5 + \dfrac{(94{\cdot}5 - 79)}{25} \times 1$

$= 14{\cdot}5 + \dfrac{15{\cdot}5}{25}$

$= 14{\cdot}5 + 0{\cdot}62$

$= 15{\cdot}12.$

கால்மான விலக்கச் சூத்திரம் $Q.D. = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$\therefore \text{ கால்மான விலக்கம் } Q.D. = \frac{15 \cdot 12 - 13 \cdot 196}{2} = \frac{1 \cdot 924}{2} = 0 \cdot 962.$$

மாதிரி 156

கீழ்க் காணும் விவரங்களுக்குக் கால்மான விலக்கத்தையும் கால்மான விலக்கக் கெழுவையும் காண்.

மாதக் கூலி (ரூபாயில்)	கூலி சம்பாதிப்பவர்களின் எண்ணிக்கை	மாதக் கூலி (ரூபாயில்)	கூலி சம்பாதிப்பவர்களின் எண்ணிக்கை
12·5—17·5	2	37·5—42·5	4
17 5—22·5	22	42·5—47·5	6
22·5—27 5	19	47·5—52·5	1
27·5—32·5	14	52·5—57·5	1
32·5—37·5	3		

(பயிற்சிக் கணக்கு—சியாவுதீன்)

தீர்வு :

மாதக் கூலி (ரூபாயில்)	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$
12·5—17·5	15	2	2
17·5—22·5	20	22	24
22·5—27·5	25	19	43
27·5—32·5	30	14	57
32·5—37·5	35	3	60
37·5—42·5	40	4	64
42·5—47·5	45	6	70
47·5—52·5	50	1	71
52·5—57·5	55	1	72
		$n=72$	

முதல் கால்மான எண் $=\left(\frac{n+1}{4}\right)$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$=\frac{72+1}{4}=(18\cdot25)$ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

முதல் கால்மானம் $Q_1=l_1+\frac{\left(\frac{n+1}{4}\right)-C}{f}\times i$

இங்கு, l_1 = முதல் கால்மானப் பிரிவின் கீழ் எல்லையாகும்.

i = பிரிவு இடைவெளி.

f = Q_1 பிரிவின் அலைவெண்.

n = மொத்த அலைவெண்.

C = Q_1 பிரிவுக்கு முன் பிரிவு வரை உள்ள அலைவெண்களின் குவி அலைவெண் ஆகும்.

∴ முதல் கால்மானம் $Q_1=17\cdot5+\frac{(18\cdot25-2)}{22}\times5$

$=17\cdot5+\frac{16\cdot25}{22}\times5$

$=21\cdot19$ (தோராயமாக)

மூன்றுவது கால்மான எண் $=\frac{3}{4}(n+1)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$=\frac{3}{4}(72+1)=\left(\frac{219}{4}\right)$ஆவது அல்லது

(54·75) ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

மூன்றுவது கால்மானச்

சூத்திரம் $=l_1+\frac{[\frac{3}{4}(n+1)-C]}{f}\times i$

$$\therefore Q_3 = 27{\cdot}5 + \frac{(54{\cdot}75 - 43)}{14} \times 5$$

$$= 27{\cdot}5 + \frac{11{\cdot}75}{14} \times 5$$

$$= 31{\cdot}69 \text{ (தோராயமாக)}$$

கால்மான விலக்கம் $Q \cdot D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{31{\cdot}69 - 21{\cdot}19}{2}$$

$$= \frac{10{\cdot}5}{2} = 5{\cdot}25 \text{ (தோராயமாக)}$$

கால்மான விலக்கக் கெழு $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{(31{\cdot}69 - 21{\cdot}19)}{(31{\cdot}69 + 21{\cdot}19)}$$

$$= \frac{10{\cdot}5}{52{\cdot}88}$$

$$= 0{\cdot}19 \text{ (தோராயமாக)}$$

சராசரி விலக்கம்
(Mean Deviation)

மாதிரி 157

கீழ்க் காணும் 10 மதிப்பெண்களுக்குச் சராசரி விலக்கங்களை முறையே (1) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து (2) இடை நிலையிலிருந்து (3) முகட்டிலிருந்து கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள் : 20 22 27 30 31
32 40 40 40 48.

தீர்வு :

(1) முதலில் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட்டு, பின் அதிலிருந்து சராசரி விலக்கத்தைக் காண்கிறோம்.

வரிசை எண்	மதிப்பெண்கள் (x)	சராசரி (33) யிலிருந்து விலக்கம் (குறிகள் கணக்கிடாமல்) $\|dx\|$
1	20	13
2	22	11
3	27	6
4	30	3
5	31	2
6	32	1
7	40	7
8	40	7
9	40	7
10	48	15
$n=10$	$\Sigma x=330$	$\Sigma\|dx\|=72$

கூட்டுச் சராசரி $(\bar{x}) = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

$$= \frac{330}{10} = 10.$$

கூட்டுச் சாரசரி $\bar{x}$ யிலிருந்து

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{\Sigma|dx|}{n}$$

$$= \frac{72}{10} = 7 \cdot 2.$$

சுருக்கு வழி :

இங்கு உறுப்புகளை ஏறுவரிசையில் ஏற்கெனவே அமைத்து விட்டோம்.

p = 33ஐ விடக் குறைவான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $=6$

q = 33ஐ விடப் பெரிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $=4$

S_1 = 33ஐ விடக் குறைவான உறுப்புகளின் கூட்டல் தொகை

$= 20+22+27+30+31+32$

$= 162.$

S_2 = 33ஐ விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டல் தொகை

$= 40+40+40+48$

$= 168.$

∴ கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{S_2 - S_1 + \bar{x}(p-q)}{n}$$

$$= \frac{168-162+33\,(6-4)}{10}$$

$$= \frac{6+66}{10} = \frac{72}{10}$$

= 7·2 மதிப்பெண்கள்.

(2) முதலில் இடைநிலையைக் கணக்கிட்டு, பின் அதிலிருந்து சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடல் :

வரிசை எண்	மதிப்பெண்கள் (x)	இடைநிலை 31·5-லிருந்து விலக்கம் $\lvert dM_e \rvert$ (குறிகள் கணக்கிடாமல்)
1	20	11·5
2	22	9·5
3	27	4·5
4	30	1·5
5	31	0·5
6	32	0·5
7	40	8·5
8	40	8·5
9	40	8·5
10	48	16·5
$n = 10$		70·0

இங்கு, $\Sigma|d_{Me}| = 70{\cdot}0$

இடைநிலை $M_e = \frac{N+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 31$
6 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 32$

$$63$$

சராசரி $= \frac{63}{2} = 31{\cdot}5$

∴ இடைநிலை $M_e = 31{\cdot}5$

∴ இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma|d_{Me}|}{n}$$

$$= \frac{70{\cdot}0}{10} = 7$$ மதிப்பெண்கள்.

சுருக்கு வழி :

இங்கு $p = q$ (இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிட்டதால்)

$S_1 = 31{\cdot}5$ஐ விடக் குறைவான உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 20+22+27+30+31$

$= 130.$

$S_2 = 31{\cdot}5$ஐ விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 32+40+40+40+48$

$= 200$

இடைநிலை $(31{\cdot}5)$-லிருந்து சராசரி விலக்கம் $= \frac{S_2 - S_1}{n}$

ஆகவே, இடைநிலையிலிருந்து சராசரி

விலக்கம் $\delta_{M_e} = \frac{200-130}{10}$

$= \frac{70}{10} = 7{\cdot}0$ மதிப்பெண்கள்

(3) இங்கு 40 மூன்று தடவை மூன்று உறுப்புகளின் மதிப்புகளாக வந்துள்ளது. ஆகவே, இங்கு முகடு $=40$.

சராசரி விலக்கம் முகட்டிலிருந்து கணக்கிடல் :

வரிசை எண்	மதிப்பெண்கள் x	முகட்டி (40)-லிருந்து விலக்கம் $\|d_{Me}\|$ (குறிகள் கணக்கிடாமல்)
1	20	20
2	22	18
3	27	13
4	30	10
5	31	9
6	32	8
7	40	0
8	40	0
9	40	0
10	48	8
$n = 10$		86

இங்கு $\Sigma|d_{M_o}| = 86$

$\therefore$ முகட்டி (40)-லிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{\Sigma|d_{M_o}|}{n}$

$= \dfrac{86}{10}$

$= 8{\cdot}6$ மதிப்பெண்கள்,

சுருக்கு வழி :

p = 40ஐ விடக் குறைவான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 6

q = 40ஐ விடப் பெரிய உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை = 1

S_1 = 40ஐ விடக் குறைவான உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை

$= 20+22+27+30+31+32$

$= 162.$

S_2 = 40ஐ விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 48.$

முகட்டி (40)லிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{S_2 - S_1 + M_o\,(p-q)}{n}$$

$$= \frac{48-162+40\,(6-1)}{10}$$

$$= \frac{-114+40\times 5}{10}$$

$$= \frac{200-114}{10}$$

$$= \frac{86}{10}$$

= 8·6 மதிப்பெண்கள்.

மாதிரி 158

கீழ்க் காண்பவற்றிற்கு (1) சராசரி விலக்கம்

(2) இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

வரிசை	1	2	3	4	5
வருமானம் (டாலர்களில்)	25·00	22·00	31·00	18·00	29·00

தீர்வு :

(1) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம் கணக்கிடல் : முதலில் வருமானத்தை ஏறு வரிசையில் எழுதவேண்டும்.

வரிசை எண்	வருமானம் (டாலரில்) (x)	சராசரி (25)-யிலிருந்து விலக்கம் $\lvert d\bar{x}\rvert$ (குறிகள் கணக்கிடாமல்)
4	18·00	7·00
2	22·00	3·00
1	25·00	0
5	29·00	4·00
3	31·00	6·00
$n = 5$	125·00	20 00

(1) கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{\Sigma x_1}{n}$

$$= \frac{5}{125{\cdot}00}$$

$= 25{\cdot}00$ டாலர்கள்

கூட்டுச் சராசரியி லிருந்து விலக்கம் $= \dfrac{\Sigma \lvert d\bar{x}\rvert}{n}$

$$= \frac{20{\cdot}00}{5}$$

$= 4{\cdot}00$ டாலர்கள்

(2) மேற்கண்ட கணக்கில் இடைநிலை

$= \dfrac{(n+1)}{2}$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \dfrac{(5+1)}{2}$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$\therefore$ 3 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $= 25{\cdot}00$ டாலர்கள்.

∴ இடைநிலை = 25·00 டாலர்கள்.

இங்கு, கூட்டுச் சராசரி = இடை நிலை = 25·00.

ஆகவே கூட்டுச் சராசரி (25·00)யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் = இடை நிலை (25·00) யிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

= **4·00 டாலர்கள்.**

மாதிரி 159

சுருக்கு வழியில் கீழ்க் காண்பவற்றிற்குச் சராசரி விலக்கத்தைக் காண்.

மதிப்பெண்கள்	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
அலைவெண்கள் f	2	8	10	4	1

(பி. காம்—சென்னை—1961)

தீர்வு :

சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடல் :

மதிப்பெண்கள்	மத்திய மதிப்பு (x)	அலைவெண் (f)	$f \times x$	ஊகச் சராசரி (25) யிலிருந்து விலக்கம் (d) (குறிகள் கணக்கிடாமல்	$(f \times dx)$ (குறிகள் கணக்கிடாமல்)
0—10	5	2	10	20	40
10—20	15	8	120	10	80
20—30	25	10	250	0	0
30—40	35	4	140	10	40
40—50	45	1	45	20	20
		$\Sigma f = 25$	$\Sigma fx = 565$		$\Sigma f d x = 180$

கூட்டுச் சராசரி $= \frac{\Sigma fx}{x}$

$= \frac{565}{25}$

$= \mathbf{22 \cdot 6}$.

சராசரி விலக்கம் $= \frac{\Sigma f dx + (\bar{x} - A) \times (S_1 - S_2)}{n}$

$= \frac{180 + (25 - 22 \cdot 6) \times (15 - 10)}{25}$

$= \frac{180 + 12}{25} = \frac{192}{25}$

$= \mathbf{7 \cdot 7}$

மாதிரி 160

கீழ்க் காணும் அட்டவணையில் தந்துள்ள 50 கல்லூரி மாணவர்களின் காலாட்படை ஆல்பா மதிப்பெண்களின் பரவலுக்கு

(1) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

(2) இடை நிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

மதிப்பெண்கள்	அலைவெண்கள்
140—150	4
150—160	6
160—170	10
170—180	18
180—190	9
190—200	3
மொத்தம்	50

(சென்னை—1962)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரியையும் இடைநிலையையும் கணக்கிடல் :

மதிப் பெண்கள்	மத்திய மதிப்பு x	அலை வெண் f	$f \times x$	குவி அலை வெண் $c.f$
140—150	145	4	580	4
150—160	155	6	930	10
160—170	165	10	1650	20
170—180	175	18	3150	38
180—190	185	9	1665	47
190—200	195	3	585	50
மொத்தம்		50	8560	

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$.

$$= \frac{8560}{50}$$

$$= 171{\cdot}2.$$

இடைநிலை M_e $= l_1 + \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{2}\right) - C}{f} \times i$

$$= 170 + \frac{25{\cdot}5 - 20}{18} \times 10$$

$$= 170 + 3{\cdot}055$$

$$= 173{\cdot}056$$

சராசரி விலக்கங்களைக் கணக்கிடல் :

மதிப்பெண்கள் x	அலைவெண் f	சராசரி $\bar{x}=171\cdot2$ லிருந்து விலக்கம் $\|d\bar{x}\|$	இடைநிலை M_e $(=173)$ யிலிருந்து விலக்கம் $\|dM_e\|$	$f\,\|d\bar{x}\|$	$f\,\|dM_e\|$
145	4	26·2	28	104·8	112
155	6	16·2	18	97·2	108
165	10	6·2	8	62·0	80
175	18	3·8	2	68·4	36
185	9	13·8	12	124·2	108
195	3	23·8	22	71·4	66
மொத்தம்	50			528·0	510

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma|fd\bar{x}|}{n}$$

$$= \frac{528\cdot0}{50}$$

$$= 10\cdot56$$

இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma|fdM_e|}{n}$$

$$= \frac{510}{50}$$

$$= 10\cdot2.$$

மாதிரி 161

ஒரு குறிப்பிட்ட சமூகத்தில் கணவன் மனைவி இருவருக்கிடையே உள்ள வயது வித்தியாசத்தைக் கீழ்க் காணும் விவரங்கள் தருகின்றன. சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

வயது வித்தியாசம் (ஆண்டுகளில்)	0–5	5–10	10–15	15–20
அலைவெண்	449	705	507	281
வயது வித்தியாசம் (ஆண்டுகளில்)	20–25	25–30	30–35	35–40
அலைவெண்	109	52	16	4

(பி.காம்.—பம்பாய்—1936)

தீர்வு :

சராசரி விலக்கத்தைக் கணக்கிடல் :

வயது வித்தியாசம் (ஆண்டுகள்)	மத்திய மதிப்பு (x)	அலைவெண் (f)	சராசரி (7·5) யிலிருந்து படி விலக்கம் dx'	பெருக்கல் fdx'
0—5	2·5	449	—1	—449
5—10	7·5	705	0	0
10—15	12·5	507	1	507
15—20	17·5	281	2	562
20—25	22·5	109	3	327
25—30	27·5	52	4	208
30—35	32·5	16	5	80
35—40	37·5	4	6	24
		2123		1259

கூட்டுச் சராசரி $= A + \frac{\Sigma f dx'}{\Sigma f} \times C$

$= 7{\cdot}5 + \frac{1259}{2123} \times 5$

$= 7{\cdot}5 + 2{\cdot}96$

$= 10{\cdot}5$ (தோராயமாக)

$\Sigma F|dx'|$ $= 449 + 1708 = 2157.$

ஊகச் சராசரி (7·5)யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களின் கூட்டல் $= 2157 \times 5 = 10785$

S_1 = உண்மைச் சராசரி (10·5)யை விடக் குறைவான உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 449 + 705$

$= 1154.$

S_2 = உண்மைச் சராசரி (10·5) யை விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 507 + 281 + 109 + 52 + 16 + 4$

$= 969.$

∴ உண்மைச் சராசரி (10·5) யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= \Sigma f|d'x| \times C + (\bar{x} - 7{\cdot}5)(S_2 - S_1)$

$= 10785 + (10{\cdot}5 - 7{\cdot}5)(1154 - 969)$

$= 10785 + (3 \times 185)$

$= 11340.$

∴ உண்மைச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$= \frac{[\Sigma f\,|d\,x|] \times C + (\bar{x} - A)(S_1 - S_2)}{\Sigma f}$

$= \frac{11340}{2123} = 5{\cdot}3$ (தோராயமாக)

மாதிரி 162

கீழ்க் காணும் அட்டவணையிலிருந்து,

(1) கூட்டுச் சராசரி

(2) பரவலின் முதல் விலக்க விசைப் பெருக்கச் சராசரி (சராசரி விலக்கம்) ஆகியவற்றைக் காண்.

உறுப்பின் அளவு	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
அலைவெண்	3	7	22	60	85	32	8

(பி.காம். – சென்னை—1942)

தீர்வு :

(1) கூட்டுச் சராசரியையும் (2) சராசரி விலக்கத்தையும் கணக்கிடல் :

உறுப்பின் அளவு	மத்திய மதிப்பு (x)	அலை வெண் (f)	ஊகச் சராசரி (6·5) யிலிருந்து விலக்கம் (dx)	(fdx)	$\|fdx\|$ (குறிக் கணக் கிடாமல்)
3—4	3·5	3	—3	— 9	9
4—5	4·5	7	—2	—14	14
5—6	5·5	22	—1	—22	22
6—7	6·5	60	0	0	0
7—8	7·5	85	1	85	85
8—9	8·5	32	2	64	64
9—10	9·5	8	3	24	24
		$\Sigma f = 217$		$\Sigma fdx = 128$	$\Sigma\|fdx\| = 218$

கூட்டுச் சராசரி $= A+\frac{\Sigma fdx}{\Sigma F}$

$= 6{\cdot}5 + \frac{128}{217}$

$= 6{\cdot}5+0{\cdot}59$

$=7{\cdot}1$ (தோராயமாக).

ஊகச் சராசரி (6·5) யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$=218.$

S_1 = உண்மைச் சராசரி (7·1) யை விடக் குறைவான உறுப்பு களின் கூட்டுத் தொகை

$=3+7+22+60$

$=92.$

S_2 = உண்மைச் சராசரி (7·1) யை விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 85+32+8=217-92$

$= 125$

ஆதலால் உண்மைச் சராசரி (7·1) யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= \Sigma|fd\bar{x}|+(x-A)(S_1-S_2)$

$= 218+(7{\cdot}1-6{\cdot}5)(92-125)$

$= 218-(0{\cdot}6\times 33)$

$= \mathbf{198{\cdot}2}.$

∴ உண்மைச் சராசரி (7·1) யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$= \frac{\Sigma|fdx|+\text{மொத்தப் பிழை}}{n}$

$= \frac{198{\cdot}2}{217}$

$=0{\cdot}91$ (தோராயமாக)

மாதிரி 163

கீழ்க் காணும் அட்டவணையிலிருந்து

(1) இடைநிலை சராசரி விலக்கக் கெழு (2) சராசரி விலக்கக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

உறுப்புகளின் அளவு	4	6	8	10	12	14	16
அலைவெண்	2	4	5	3	2	1	4

(எம். ஏ.—ஆக்ரா—1954)

தீர்வு :

முதலில் இடைநிலையையும், கூட்டுச் சராசரியையும் கணக்கிட வேண்டும்.

உறுப்புகளின் அளவு x	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$	$f \times x$
4	2	2	8
6	4	6	24
8	5	11	40
10	3	14	30
12	2	16	24
14	1	17	14
16	4	21	64
$n = 7$			204

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{21+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

= 11 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

= 8.

கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{\Sigma fx}{n}$

$= \dfrac{204}{21}$

= **9·7.**

இடைநிலை விலக்கக் கெழுவையும், சராசரி விலக்கக் கெழுவையும் கணக்கிடல் :

உறுப்பின் அளவு	அலைவெண் (f)	இடைநிலை (8) யிலிருந்து விலக்கம் $\lvert d\,M_e\rvert$ (குறிகள் கணக்கிடாமல்)	சராசரி (9.7) யிலிருந்து dx (குறிகக் கணக்கிடாமல்)	$\lvert fd\,M_e\rvert$	$\lvert f\,d\,\bar{x}\rvert$
4	2	4	5·7	8	11·4
6	4	2	3·7	8	14·8
8	5	0	1·7	0	8·5
10	3	2	0·3	6	0·9
12	2	4	2·3	8	4·6
14	1	6	4·3	6	4·3
16	4	8	6·3	32	25·5
				$\Sigma\lvert fd_{M_e}\rvert = 68$	$\Sigma\lvert fd\bar{x}\rvert = 627$

இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$= \Sigma\lvert fd_{M_e}\rvert$

$= \dfrac{68}{21} = \mathbf{3{\cdot}24}$

∴ இடைநிலை விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$$

$$= \frac{3{\cdot}24}{8}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}405}$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma|fd\bar{x}|}{n}$$

$$= \frac{69{\cdot}7}{21}$$

$$= \mathbf{3{\cdot}32}$$

∴ சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$$

$$= \frac{3{\cdot}31}{9{\cdot}7}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}932}$$

மாதிரி 164

கீழ்க் காணுபவை 18 வீடுகளின் வாடகைகளாகும்.

ரூபாய்	—	பை.	ரூபாய்	—	பை.
6	—	50	6	—	25
5	—	00	3	—	00
5	—	25	9	—	00
5	—	50	4	—	50
5	—	25	4	—	00
4	—	75	3	—	00
4	—	00	3	—	75

5	—	00	5	—	00
4	—	50	3	—	00

மேற்கண்ட வாடகைகளின் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கங்களைக் காண்.

(பி. காம்—லட்சுமணபுரி—1930)

தீர்வு :

முதலில் உறுப்புகளை ஏறு வரிசை மதிப்பில் அமைப்போம்.

வீட்டு வரிசை எண்	வாடகை (ரூபாய்களில்)	(4 875)லிருந்து விலக்கம் $\|d_{Me}\|$ (குறிகளைக் கணக்கிடாமல்)
1	3·00	1·875
2	3·00	1·875
3	3·00	1 875
4	3·75	1·125
5	4·00	0 875
6	4·00	0·875
7	4·50	0·375
8	4·50	0·375
9	4·75	0·125
10	5·00	0·125
11	5·00	0·125
12	5·00	0·125
13	5·25	0·375
14	5·25	0·375

வீட்டு வரிசை எண்	வாடகை (ரூபாய்களில்)	(4·875)லிருந்து விலக்கம் (d_{M_e}) (குறிகளைக் கணக்கிடாமல்)
15	5·50	0·625
16	6·25	1·375
17	6·50	1·625
18	9·00	4·125
$n = 18$		18·250

இங்கு, $\Sigma|d_{M_e}| = 18{\cdot}250$

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

= 9·5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பாகும்.

$= \frac{4{\cdot}75 + 5{\cdot}00}{2} = 4{\cdot}875$ ரூபாய்கள்.

இடைநிலை (4·875)யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma|d_{M_e}|}{n}$$

$$= \frac{18{\cdot}25}{18}$$

= **1·014** ரூபாய்கள்.

சுருக்கு வழி :

S_1 = இடைநிலை (4·875)யை விடச் சிறிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 3{\cdot}0 + 3{\cdot}0 + 3{\cdot}0 + 3{\cdot}75 + 4{\cdot}0 + 4{\cdot}0 + 4{\cdot}5 + 4{\cdot}5 + 4{\cdot}75$

$= 34{\cdot}50$

S_2 = இடைநிலை (4·875)யை விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 5{\cdot}0 + 5{\cdot}0 + 5{\cdot}0 + 5{\cdot}25 + 5{\cdot}25 + 5{\cdot}5 + 6{\cdot}25 + 6{\cdot}5 + 9{\cdot}0$

$= 52{\cdot}75$

இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{S_2 - S_1}{n}$$

$$= \frac{52{\cdot}75 - 35{\cdot}50}{18}$$

$$= \frac{18{\cdot}25}{18}$$

= 1·014 ரூபாய்.

மாதிரி 165

கீழ்க் காணும் அட்டவணை இரண்டு இடங்களில் வசிப்பவர்களின் உணவுக்கான செலவினைக் கொடுக்கிறது :

(1) இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம்

(2) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

மாதச் செலவு ரூபாயில்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	
	இடம் 'அ'	இடம் 'ஆ'
3—6	28	39
6—9	292	284
9—12	389	401
12—15	212	202
15—18	59	48
18—21	18	21
21—24	2	5

(பி. சி. எஸ்,—1941)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்கம், இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் காணல் :

மாதச் செலவு (ரூபாயில்)	மத்திய மதிப்பு x	ஊகச் சராசரி (10·5) யிலிருந்து படி விலக்கம் dx	இடம் 'அ'			இடம் 'ஆ'		
			அலைவெண் f	பெருக்கல் fdx	குவி அலைவெண் $(c.f)$	அலைவெண் f'	பெருக்கல் $f'dx$	குவி அலைவெண் $(c.f')$
3—6	4·5	—2	28	— 56	28	39	— 78	39
6—9	7·5	—1	292	—292	320	284	—284	323
9—12	10·5	0	389	0	709	401	0	724
12—15	13·5	1	212	212	921	202	202	926
15—18	16·5	2	59	118	980	48	96	974
18—21	19·5	3	18	54	998	21	63	995
21—24	22·5	4	2	8	1000	5	20	100
			100	44		100	19	

இங்கு,

$$\Sigma f = 1000, \qquad \Sigma f dx = 44$$
$$\Sigma f' = 1000, \qquad \Sigma f' dx = 19.$$

இடம் 'அ' :

(1) கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx}{\Sigma f} \times C$

$$= 10{\cdot}5 + \frac{44}{1000} \times 3$$

$= 10{\cdot}632$ ரூபாய்கள்.

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{\Sigma f|dx| \times C + (\bar{x} - A)(S_1 - S_2)}{\Sigma f}$$

$$= \frac{(740 \times 3) \times (10{\cdot}632 - 10{\cdot}5) \times (709 - 291)}{1000}$$

$= 2{\cdot}28$ ரூபாய்கள் (தோராயமாக)

(2) இடைநிலை $M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{N+1}{2}\right) - C}{f} \times i$

$$= 9 + \frac{(500{\cdot}5 - 320)}{389} \times 3$$

$= 10{\cdot}388$ ரூபாய்கள்.

இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்

$$= \delta_{M_e}$$

$$= \frac{\Sigma f|dx| \times C + (M_e - A)(S_1 - S_2)}{\Sigma f}$$

$$= \frac{1}{1000}\{(740 \times 3) + (10{\cdot}388 - 10{\cdot}5) \times (320 \times 680)\}$$

$= 2{\cdot}26$ ரூபாய்கள் (தோராயமாக).

இடம் 'ஆ' :

(1) கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f' dx}{\Sigma f} \times C$

$$= 10{\cdot}5 + \frac{19}{1000} \times 3$$

$= 10{\cdot}557$ ரூபாய்கள்.

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கம்

$$= \delta_{\bar{x}}$$

$$= \frac{\Sigma f'|dx| \times C + (\bar{x} - A) \times (S_1 - S_2)}{\Sigma f'}$$

$$= \frac{1}{1000} \{(743 \times 3) + (10{\cdot}557 - 10{\cdot}5) \times (724 - 276)\}$$

= **2·25** ரூபாய்கள் (தோராயமாக).

(2) இடைநிலை (M_e)

$$= l_1 + \frac{\left(\frac{N+1}{2}\right) - C}{f} \times i$$

$$= 9 + \frac{500{\cdot}5 - 323}{401} \times 3$$

= **10·394 ரூபாய்கள்.**

இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி வில்க்கம்

$$= \delta_{M_e}$$

$$= \frac{\Sigma f'|dx| \times C + (M_e - A) \times (S_1 - S_2)}{\Sigma f'}$$

$$= \frac{1}{1000} \{(743 \times 3) + (10{\cdot}394 - 10{\cdot}5)(323 - 677)\}$$

= **2·29 ரூபாய்கள்** (தோராயமாக).

மாதிரி 166

கீழ்க் காணும் அட்டவணை வயதடைந்தவர்கள் 228 பேரின் எடையைக் கொடுக்கிறது. இதைக் கொண்டு,

(1) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம்

(2) இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம்

(3) சார்புப் பரவலின் கெழுக்கள்

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

எடை (பவுண்டில்)	அலைவெண்	எடை (பவுண்டில்)	அலைவெண்
80— 90	1	160—170	9
90—100	11	170—180	5
100—110	25	180—190	4
110—120	37	190—200	3
120—130	62	200—210	2
130—140	31	210—220	1
140—150	22		
150—160	15	மொத்தம்	228

தீர்வு :

(1) சராசரி விலக்கம் காணல் :

எடை (பவுண்டில்)	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் (f)	(135) லிருந்து படி-விலக்கம் (dx)	fdx	$\|f\,dx\|$ (குறிகளைக் கணக்கிடாமல்)
80— 90	85	1	—5	— 5	5
90—100	95	11	—4	—44	44
100—110	105	25	—3	—75	75
110—120	115	37	—2	—74	74
120—130	125	62	—1	—62	62
130—140	135	31	0	0	0
140—150	145	22	1	22	22
150—160	155	15	2	30	30
160—170	165	9	3	27	27
170—180	175	5	4	20	20
180—190	185	4	5	20	20
190—200	195	3	6	18	18
200—210	205	2	7	14	14
210—220	215	1	8	8	8
	மொத்தம்	228			419

கூட்டுச் சராசரி $= A + \frac{\Sigma f d' x}{\Sigma f} \times C$

$= 135 + \left(\frac{-101}{208} \times 10\right)$

$= 135 - 4{\cdot}43.$

$= 130{\cdot}57$ பவுண்டுகள்.

சராசரி விலக்கம் $\delta_{\bar{x}} = \frac{\Sigma |f dx| \times C + (\bar{x} - A)\,[S_1 - S_2]}{n}$

ஊகச் சராசரி (135) யிலிருந்து விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= \Sigma |f dx| \times C$

$= 419 \times 10$

$= 4190$

S_1 = உண்மைச் சராசரி (130·57) யை விடச் சிறிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 1 + 11 + 25 + 37 + 62$

$= 136$

S_2 = உண்மைச் சராசரி (130·57) யை விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 31 + 22 + 15 + 9 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

$= 92$

∴ உண்மைச் சராசரி 130·57-லிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= 4190 + 130{\cdot}57(-135)\,(136 - 92)$

$= 4190 - 4{\cdot}43 \times 44$

$= 4190 - 194{\cdot}92$

$= 3995{\cdot}08.$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிட்ட சராசரி விலக்கம் $(\delta\bar{x})$

$= \frac{3995{\cdot}08}{228}$

$= 17{\cdot}52$ பவுண்டுகள்.

(2) இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் :

எடை (பவுண்டில்)	மத்திய மதிப் பெண் x_i	அலை வெண் f_i	குவி அலை வெண் $c.f$	(125) லிருந்து விலக்கம் $\mid dx \mid$ (குறிகளைக் கணக்கிடாமல்	$f\mid dx'\mid$ (குறிகள் கணக் கிடாமல்)
80—90	85	1	1	4	4
90—100	95	11	12	3	33
100—110	105	25	37	2	50
110—120	115	37	74	1	37
120—130	125	62	136	0	0
130—140	135	31	167	1	31
140—150	145	22	189	2	44
150—160	155	15	204	3	45
160—170	165	9	213	4	36
170—180	175	5	218	5	25
180—190	185	4	225	6	24
190—200	195	3	225	7	21
200—210	205	2	227	8	16
210—220	215	1	228	9	9
		228			375

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \frac{228+1}{2} = \frac{229}{2} = 114{\cdot}5$-ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$$\therefore \; M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{N+1}{2}\right) - C}{f} \times i$$

$$= 120 + \frac{114{\cdot}5 - 74}{62} \times 10$$

$$= 120 + \frac{40 \cdot 5 \times 10}{62}$$

$$= 120 + 6 \cdot 53$$

$$= \mathbf{126 \cdot 53.}$$

சுருக்கவும் :

இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் (δM_2)

$$= \frac{\Sigma|fd'x| \times 10 + (M_e - A)(S_1 - S_2)}{n}$$

ஊகச் சராசரி (125)யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \Sigma|fdx| \times C$$

$$= 375 \times 10 = 3750.$$

S_1 = இடைநிலை (126·53) யை விடச் சிறிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$$= 1 + 11 + 25 + 37 + 62$$

$$= 136.$$

S_2 = இடைநிலை (126·53) யை விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$$= 31 + 22 + 15 + 9 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$= 92.$$

இடைநிலை (126·53) யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= 3750 + (126 \cdot 53 - 125)(136 - 92)$$

$$= 3750 + 1 \cdot 53 \times 44$$

$$= 3750 + 67 \cdot 32.$$

$$= \mathbf{3817 \cdot 32.}$$

∴ **இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம்**

$$= \frac{3817 \cdot 22}{228} = \mathbf{16 \cdot 74}$$

(3) (i) **கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கண்ட சராசரி விலக்கக்**

$$\text{கெழு} = \frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} = \frac{17 \cdot 52}{130 \cdot 57} = 0 \cdot 134.$$

(ii) இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{(\delta M_e)}{M_e} = \frac{16{\cdot}74}{126{\cdot}53}$$

$$= 0{\cdot}132.$$

மாதிரி 167

கீழ்க் காணும் அட்டவணை 1000 பேர்களின் வயதுப் பரவலைக் கொடுக்கிறது.

(i) கூட்டுச் சராசரியையும் (ii) இடைநிலையையும் கணக்கிடு. பின் அதிலிருந்து (iii) முகட்டையும் மதிப்பிடு.

பின்னர்,

(1) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம்
(2) இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம்
(3) முகட்டிலிருந்து சராசரி விலக்கம்
(4) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கக் கெழு
(5) இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கக் கெழு
(6) முகட்டிலிருந்து சராசரி விலக்கக் கெழு

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

வயது (ஆண்டுகளில்)	அலைவெண் f	வயது (ஆண்டுகளில்)	அலைவெண் f	வயது (ஆண்டுகளில்)	அலைவெண் f
20—25	33	45–50	115	70–75	21
25—30	112	50–55	96	75—80	9
30—35	152	55—60	74	80—85	4
35—40	154	60—65	54		
40—45	136	65—70	37	மொத்தம்	1000

(திருவனந்தபுரம் பல்கலை—1951)

தீர்வு :

(i) கூட்டுச் சராசரியை (ii) இடைநிலையைக் கணக்கிடல் :

பின்பு $\bar{x}$; M_e-லிருந்து (iii) முகட்டை $M_o = 3\,M_e - 2\,\bar{x}$ என்ற சூத்திரம் மூலம் கணக்கிடல் :

(இங்கு M_0 = முகடு M_e = இடைநிலை $\bar{x}$ = கூட்டுச் சராசரி)

வயதுப் பிரிவு (ஆண்டுகளில்)	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் f	ஊகச் சராசரி (3·75) லிருந்து படிவிலக்கம் dx	பெருக்கல் fdx	குவி அலைவெண் $c.f$
20—25	22·5	33	—3	— 99	33
25—30	27·5	112	—2	—224	145
30—35	32·5	152	—1	—152	297
35—40	37·5	154	0	0	451
40—45	42·5	136	1	136	587 M
45—50	47·5	118	2	236	705
50—55	52·5	96	3	288	801
55—60	57·5	74	4	296	875
60—65	62 5	54	5	270	929
65—70	67·5	37	6	222	966
70—75	72·5	21	7	147	987
75—80	77·5	9	8	72	996
80—85	82 5	4	9	36	1000
		1000		1228	

(i) கூட்டுச் சராசரி :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{\Sigma f} \times C$

$$= 37{\cdot}5 + \frac{1228}{1000} \times 5$$

$$= \mathbf{43{\cdot}64}$$

(ii) இடைநிலை :

இடைநிலை $M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - C}{f} \times i$

$$= 40 + \frac{\frac{1001}{2} - 451}{136} \times 5$$

$$= 40 + \frac{49{\cdot}5 \times 5}{136}$$

$$= \mathbf{41{\cdot}8}$$

(iii) முகடு :

$$\text{முகடு } M_0 = 3\, M_e - 2\, \bar{x}$$

$$= (3 \times 41{\cdot}8) - (2 \times 43{\cdot}64)$$

$$= 125{\cdot}4 - 87{\cdot}28$$

$$= \mathbf{38{\cdot}12.}$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம், இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம், முகட்டிலிருந்து சராசரி விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடல் :

வயதுப் பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் f	ஊகச் சராசரி (42.5) யிலிருந்து படி விலக்கம் $\lvert dx \rvert$ (குறிகள் கணக்கிடாமல்)	பெருக்கல் $\lvert fdx \rvert$ (குறிகள் கணக்கிடாமல்)
20—25	22·5	33	4	132
25—30	27·5	112	3	336
30—35	32·5	152	2	304
35—40	37·5	154	1	154
40—45	42·5	136	0	0
45—50	47·5	118	1	118
50—55	52·5	96	2	192
55—60	57·5	72	3	222
60—65	62·5	54	4	216
65—70	67·5	37	5	185
70—75	72·5	21	6	126
75—80	77·5	9	7	63
80—85	82·5	4	8	32
		1000		2080

(1) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் :

ஊகச் சராசரி 42·5-லிருந்து மொத்த விலக்கம் $= 2080 \times 5$

$= \mathbf{10400}$

S_1 = உண்மைச் சராசரி(43·64)யை விடக் குறைந்த உறுப்பு களின் கூட்டுத் தொகை

$= 33+112+152+154+136 = \mathbf{587}.$

S_2 = உண்மைச் சராசரி (43·64)யை விடப் பெரிய உறுப்பு களின் கூட்டுத் தொகை

$= 1000 - 587 \qquad = \mathbf{413}$

∴ உண்மைச் சராசரி (43·64) யிலிருந்து விலக்கங்களின் கூட்டல்

$= \Sigma f|dx| \times C + (\bar{x} - A) + (S_1 - S_2)$

$= 2080 \times 5 + (43{\cdot}64 - 42{\cdot}5) \times (587 - 413)$

$= \mathbf{10598}.$

∴ உண்மைச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் $\Big\} = \dfrac{10598}{1000}$

$= \mathbf{10{\cdot}598}.$

(2) இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் :

இடைநிலை $= 41{\cdot}8.$

ஊகச் சராசரி (42·5)யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மொத்த விலக்கம் $\Big\} = \Sigma f\,|dx| \times C$

$= 2080 \times 5$

$= 10400.$

S_1 = உண்மை இடைநிலை (41·8)யை விடக் குறைவான உறுப் புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 33+112+152+154 \quad = 451$

S_2 = உண்மை இடைநிலை (41·8) யை விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 1000 - 451 \qquad = 549.$

ஆக, உண்மை இடைநிலை (41·8)யிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மொத்த விலக்கம்

$$= \Sigma f|dx| \times C + (M_e - A) \times (S_1 - S_2)$$
$$= (2080 \times 5) + (41{\cdot}8 - 42{\cdot}5) \times (451 - 549)$$
$$= 10400 + (-0{\cdot}7) + (-98)$$
$$= \mathbf{10468{\cdot}6.}$$

∴ இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{10468{\cdot}6}{1000}$

$$= \mathbf{10{\cdot}4686.}$$

(3) முகட்டிலிருந்து கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கம் :

முகடு $M_0 = 38{\cdot}12.$

ஊகச் சராசரி (42·5)யிலிருந்து மொத்த விலக்கம் $= \Sigma f|dx| \times C$

$$= 2080 \times 5$$
$$= 10400$$

S_1 = உண்மை முகடு 38·12 ஐ விடக் குறைந்த உறுப்புகளின் மொத்தத் தொகை

$= 33 + 112 + 152 + 154 = \mathbf{451}$

S_2 = உண்மை முகடு 38·12 ஐ விடப் பெரிய உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$= 1000 - 451 \qquad = \mathbf{549.}$

ஆக, உண்மை முகடு 38·12-லிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மொத்த விலக்கம்

$$= \Sigma f|dx| \times C + (M_o - A) \times (S_1 - S_2)$$
$$= (2080 \times 5) + (38{\cdot}12 - 42{\cdot}5)\ (451 - 549)$$
$$= 10400 + (4{\cdot}8 \times 98)$$
$$= 10870{\cdot}4$$

$\therefore$ முகட்டிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் $= \frac{10870.4}{1000}$

$= 10.8704$

சராசரி விலக்கக் கெழுக்களைக் கணக்கிடல் :

(4) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கக் கெழு :

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கக் கெழு $=$ $\frac{\text{கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணித்த சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$

$= \frac{10.598}{43.6}$

$= 0.243.$

(5) இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கக் கெழு :

இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கக் கெழு $= \frac{\delta M_e}{M_e}$

$= \frac{10.4686}{41.8}$

$= 0.250.$

(6) முகட்டிலிருந்து சராசரி விலக்கக் கெழு :

முகட்டிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கக் கெழு $= \frac{\delta M_o}{M_o}$

$= \frac{10.8704}{42.5}$

$= 0.256.$

திட்ட விலக்கம்
(Standard Deviation)

மாதிரி 168

கீழ்க் காணும் 10 மாணவர்களின் உயரங்களுக்குத் திட்ட விலக்கம் காண்.

60, 60, 61, 62, 63, 63, 63, 64, 64, 70.

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

உயரம் (அங்குலத்தில்) x	கூட்டுச் சாரசரி(63") யிலிருந்து விலக்கம் (d)	விலக்க வர்க்கம் d^2
60	— 3	9
60	— 3	9
61	— 2	4
62	— 1	1
63	0	0
63	0	0
63	0	0
64	1	1
64	1	1
70	7	49
		$\Sigma d^2 = 74$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

$$= \frac{630}{10}$$

$$= 63''$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$

$$= \sqrt{\frac{74}{10}} = \sqrt{7 \cdot 4}$$

$$= 2 \cdot 72.$$

சுருக்கு முறை :

உயரம் (அங்குலத்தில்)	ஊகச் சராசரி (62")யிலிருந்து விலக்கம் (dx)	விலக்கங்களின் வர்க்கம் $(dx)^2$
60	— 2	4
60	— 2	4
61	— 1	1
62	0	0
63	1	1
63	1	1
63	1	1
64	2	4
64	2	4
70	8	64
	$\Sigma dx = 10$	$\Sigma (dx)^2 = 84$

திட்ட விலக்கம்
$$= \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{84}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(8 \cdot 4 - 1)}$$
$$= \sqrt{7 \cdot 4}$$
$$= 2 \cdot 72''$$

மாதிரி 169

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருப்பது 10 இரும்புக் கம்பிகளின் நீளங்களைக் குறிக்கிறது. திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடு.

நீளங்கள் (அங்குலத்தில்): 77, 73, 75, 70, 72,
76, 75, 72, 74, 76.

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

நீளம் (அங்குலத்தில்) (x)	கூட்டுச் சராசரி (74) யிலிருந்து விலக்கம் $x-\bar{x}$	கூட்டுச் சராசரி விலக்க வர்க்கம் $(x-\bar{x})^2$
77	3	9
73	− 1	1
75	1	1
70	− 4	16
72	− 2	4
76	2	4
75	1	1
72	− 2	4
74	0	0
76	2	4
$\Sigma x = 740$	0	$\Sigma (x-\bar{x})^2 = 44$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= 740/10$

$= 74''$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x-\bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{44}{10}}$

$= 2{\cdot}1''$ (தோராயமாக)

மாற்று முறை :

நீளம் (அங்குலத்தில்) x	சராசரி (75)யிலிருந்து விலக்கம் d	விலக்கங்களின் வர்க்கம் d^2
77	2	4
73	— 2	4
75	0	0
70	— 5	25
72	— 3	9
76	1	1
75	0	0
72	— 3	9
74	— 1	1
76	1	1
$\Sigma x = 740$	$\Sigma d = 10$	$\Sigma d^2 = 54$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ $= \dfrac{\Sigma x}{n}$

$= 740/10$

$= 74''$

திட்ட விலக்கம் σ $= \sqrt{\dfrac{\Sigma d^2}{n} - (\bar{x} - a)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{54}{10} - (75-74)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{54-10}{10}}$

$= \sqrt{\dfrac{44}{10}}$

$= 2{\cdot}1''$ (தோராயமாக)

மாதிரி 170

கீழ்க் காணும் எண்களுக்குத் திட்ட விலக்கம் காண் :

38	45	51	59	64	66	67	70	72	74
77	77	80	81	82	83	86	87	89	90.

தீர்வு :

மேற்கண்ட மதிப்புகளை x-மாறியாகக் கொண்டால் கீழ்க் காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$n = 20$$
$$\Sigma x = 1438$$
$$\Sigma x^2 = 107470.$$

ஆகவே, கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$$= \frac{1438}{20}$$

$$= 71 \cdot 9.$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\Sigma d x^2 - \left(\frac{\Sigma d x}{n}\right)^2}$

இங்கு, ஊகச் சராசரி A = 0 எனக் கொண்டால்

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{107470}{20} - \left(\frac{1438}{20}\right)^2}$

$$= \sqrt{5373 \cdot 5 - 5169 \cdot 61}$$
$$= \sqrt{203 \cdot 89}$$
$$= 14 \cdot 28.$$

மாதிரி 171

கீழ்க் காணும் 20 வெவ்வேறு ஆண்டுகளின் உலக வருடாந்திர தங்க வெளிக் கொணர்வின் (மில்லியன் பவுண்டில்) கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

94	95	96	93	97	79	73	69	68	67
78	82	83	89	95	103	108	117	130	97

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து $\pm \sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$ தூரத்திற்கு வெளியே விழும் உறுப்புகளின் சதவீதத்தைக் கணக்கிடு. (σ = திட்ட விலக்கம்)

(எம். ஏ.—சென்னை—1959)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடல் :

மதிப்புகள் x	ஊகச் சராசரி ($A=90$) யிலிருந்து விலக்கம் d	விலக்கங்களின் வர்க்கம் d^2
94	4	16
95	5	25
96	6	36
93	3	9
87	−3	9
79	−11	121
73	−17	289
69	−21	441
68	−22	484
67	−23	529
78	−12	144
82	−8	64
83	−7	49
89	−1	1
95	5	25
103	13	169
108	18	324
117	27	729
130	40	1600
97	7	49
$n=20$	$\Sigma d=3$	$\Sigma d^2=5113$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$

$$= 90 + \frac{3}{20}$$

$= 90{\cdot}15$ (மில்லியன் பவுண்டுகள்)

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{5113}{20} - \frac{9}{20}}$

$= \sqrt{255 \cdot 6275}$

$= 15 \cdot 99$ **(மில்லியன் பவுண்டுகள்)**

1. இங்கு, $\bar{x} \pm \sigma = 90 \cdot 15 \pm 15 \cdot 99$

$= (106 \cdot 16, \quad 74 \cdot 16)$

இந்த இடைவெளிக்கு வெளியே விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= 7.$

சதவீதத்தில் வெளியே விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= \frac{7}{20} \times 100$

$= 35\%$

2. இதேபோல் $\bar{x} \pm 2\sigma = 90 \cdot 15 \pm (2 \times 15 \cdot 99)$

$= 90 \cdot 15 \pm 31 \cdot 98$

$= (122 \cdot 13, \quad 58 \cdot 17)$

இந்த இடைவெளிக்கு வெளியே விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= 1.$

சதவீதத்தில் வெளியே விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= \frac{1}{20} \times 100$

$= 5\%$

3. இங்கு, $\bar{x} \pm 3\sigma = 90 \cdot 15 \pm (3 \times 15 \cdot 99)$

$= 90 \cdot 15 \pm 47 \cdot 97$

$= (138 \cdot 12, \quad 42 \cdot 18)$

இந்த இடைவெளிக்கு வெளியே விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= 0.$

சதவீதத்தில் வெளியே விழும் இந்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$= 0\%$$

மாதிரி 172

கீழ்க் காணும் அட்டவணை 542 மக்கள் சபை உறுப்பினர்களின் வயதுப் பரவலைத் தருகிறது. திட்ட விலக்கத்தைக் கணிக்கவும்.

வயது	20	30	40	50	60	70	80
உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை	3	61	132	153	140	51	2

(சென்னை—பல்கலை)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடல் :

x	f	$dx = \frac{x-A}{c}$, $A = 50$, $c = 10$	$f\,dx$	$f\,dx^2$
20	3	−3	−9	27
30	61	−2	−122	244
40	132	−1	−132	132
50	153	0	0	0
60	140	1	140	140
70	51	2	102	204
80	2	3	6	18
மொத்தம்	542		−15	765

வயதுகளின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = C\sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma dx}{\Sigma f}\right)^2}$

அல்லது $\sigma = 10 \times \sqrt{\frac{765}{542} - \left(\frac{15}{542}\right)^2}$

$= 11{\cdot}6$ (தோராயமாக)

மாதிரி 173

260 விவசாயிகள் தம்முடைய தேவைப் பண்டங்கள் வாங்க நடந்து சென்ற தூரம் (மைலில்) பற்றிய கீழ்வரும் விவரத்துக்குத் திட்ட விலக்கம் காண்.

மைல்	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
விவசாயிகளின் எண்ணிக்கை	19	52	70	39	24	21	14	12	8	1

(பி. ஏ.—மதுரை—1970)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

x	f	dx	dx^2	fdx	fdx^2
1	19	− 9	81	−152	1216
3	52	− 6	36	−312	1872
5	70	− 4	16	−280	1120
7	39	− 2	4	−78	156
9	24	0	0	0	0
11	21	2	4	42	84
13	14	4	26	56	224
15	12	6	36	72	432
17	8	8	64	64	512
19	1	10	100	10	100
மொத்தம்	260			−578	5716

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f\,dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f\,dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5716}{260} - \left(\frac{-578}{260}\right)^2}$$

$$= \sqrt{21{\cdot}99 - 4{\cdot}84}$$

$$= \sqrt{17{\cdot}15}$$

$$= 4{\cdot}14 \text{ மைல்கள்.}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f\, dx}{n} \times C$$
$$= 9 + \frac{-578}{260} \times 2$$
$$= 9 + 2{\cdot}2 \times 2$$
$$= 9 \times 4{\cdot}4$$
$$= 13 \cdot 4.$$

திட்ட விலக்கக் கெழு $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{4{\cdot}14}{13\,4}$

$= \mathbf{0{\cdot}31.}$

மாதிரி 174

கீழ்க் காணும் பரவலுக்குத் திட்ட விலக்கம் காண் :

x :	2	3	4	5	9	10	12	13	15
f :	25	37	44	59	68	43	31	23	12

தீர்வு :

x	f	$dx = x - A$ $A = 9$	fdx	fdx^2
2	25	−7	−175	1225
3	37	−6	−222	1332
4	44	−5	−220	1100
5	59	−4	−236	944
9	68	0	0	0
10	43	1	43	43
12	31	3	93	279
13	23	4	92	368
15	12	6	72	432
மொத்தம்	342		$\Sigma fdx = -553$	$\Sigma fdx^2 = 5723$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f\, dx^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma f\, dx}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{5723}{342} - \left(\dfrac{-553}{342}\right)^2}$

$= \mathbf{3{\cdot}76.}$

மாதிரி 175

பிரிட்டனிலுள்ள 2298 குடும்பங்களின் கீழ்க் காணும் பரவலுக்குத் திட்ட விலக்கம் காண் :

குடும்பத்திலுள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	5
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	165	552	580	433	268

குடும்பத்திலுள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை	6	7	8	9	10	11	12
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	148	77	41	20	8	5	1

(எம். ஏ.—அலகாபாத்—1942)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

குடும்பத்தில் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை x	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை f	$(A=4)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx	பெருக்கல் $f \times dx$	fdx^2
1	165	—3	— 495	1485
2	552	—2	—1104	2208
3	580	—1	— 580	580
4	433	0	0	0
5	268	1	268	268
6	148	2	296	592
7	77	3	231	693
8	41	4	164	656
9	20	5	100	500
10	8	6	48	288
11	5	7	55	245
12	1	8	8	64
	$n=2298$		$\Sigma fdx = -1029$	$\Sigma fdx^2 = 7579$

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma . f\, dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma\, f\, dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{7579}{2298} - \left(\frac{-1029}{2298}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3{\cdot}3 - 0{\cdot}2}$$

$$= \sqrt{3{\cdot}1}$$

$$= 1{\cdot}73 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 176

கீழ்க் காணும் அட்டவணை குறிப்பிட்ட நிலப் பகுதியில் 1940-41-ம் ஆண்டில் கதிர் அறுவடைச் சோதனையின் அடிப்படையில் கிடைத்த நெல் மகசூலே (ஏக்கருக்கு —மாண்டுகளில்) தருகிறது. பரவலின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடு.

மகசூல் (மாண்டில்) – ஏக்கருக்கு –	அலைவெண்	மகசூல் (மாண்டில்) – ஏக்கருக்கு –	அலைவெண்
0	4	24	128
3	4	27	73
6	32	30	50
9	81	33	13
12	135	36	12
15	198	39	5
18	210	42	1
21	144		

(ஐ. ஏ. எஸ்.—1949)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடல் :

மகசூல் (ஏக்கருக்கு-மாண்டுகளில்)	அலைவெண்	(18)-லிருந்துபடி விலக்கம் dx	dx^2	fdx	fdx^2
0	4	—6	36	—24	144
3	4	—5	25	—20	100
6	32	—4	16	—128	512
9	81	—3	9	—243	929
12	135	—2	4	—270	540
15	198	—1	1	—198	198
18	210	0	0	0	0
21	144	1	1	144	144
24	128	2	4	256	512
27	73	3	9	219	657
30	50	4	16	200	800
33	13	5	25	65	325
36	12	6	36	72	432
39	5	7	49	35	245
42	1	8	64	8	64
				$\Sigma fdx = 116$	$\Sigma fdx^2 = 5420$

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f\, dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f\, dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5402}{1090} - \left(\frac{116}{1090}\right)}$$

$$= 5{\cdot}85.$$

மாதிரி 177

230 பேர்களின் வருமானத்தைத் தரும் கீழ்க் காணும் விவரப் பட்டியலிலிருந்து திட்ட விலக்கத்தைக் காண்.

வருமானம் (ரூபாயில்)	மனிதர்களின் எண்ணிக்கை	வருமானம் (ரூபாயில்)	மனிதர்களின் எண்ணிக்கை
70— 80	12	110—120	50
80— 90	18	120—130	45
90—100	35	130—140	20
100—110	42	140—150	8

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

மத்திய மதிப்பு	f	$dx = \frac{x-A}{c}$ $A = 105$ $c = 10$	fdx	$f\,dx^2$
75	12	—3	—36	108
85	18	—2	—36	72
95	35	—1	—35	35
105	42	0	0	0
115	50	1	50	50
125	45	2	90	180
135	20	3	60	180
145	8	4	32	128
மொத்தம்	230		$\Sigma fdx = 125$	$\Sigma fdx^2 = 753$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C \sqrt{\frac{\Sigma f dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f dx}{n}\right)^2}$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{753}{230} - \left(\frac{125}{230}\right)^2}$$

$$= \mathbf{17 \cdot 3}$$ ரூபாய்.

மாதிரி 178

கீழ்க் காணும் 3061 அறுவடைச் சோதனை முடிவுகளின் பரவலிலிருந்து நெல் மகசூலையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

நெல் மகசூல் (ஏக்கருக்கு—பவுண்டில்)	சோதனைகளின் எண்ணிக்கை
1— 400	236
401— 800	481
801—1200	604
1201—1600	576
1601—2000	419
2001—2400	333
2401—2800	217
2801—3200	87
3201—3600	64
3601—4000	23
4001—4400	14
4401—4800	6
4801—5200	1
மொத்தம்	3061

(பி. காம்.—பம்பாய்—1945)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடல் :

மத்திய மதிப்பு x	f	$dx = \frac{x-A}{c}$ $A = 1800{\cdot}5$ $c = 400$	fdx	fdx^2
200 5	236	—4	— 944	6723
600·5	481	—3	—1443	4329
1000·5	604	—2	—1208	2416
1400·5	576	—1	— 576	576
1800·5	419	0	0	0
2200 5	333	1	333	333
2600 5	217	2	434	868
3000·5	87	3	261	783
3400·5	64	4	256	1024
3800 5	23	5	115	575
4200·5	14	6	84	504
4600·5	6	7	42	294
5000·5	1	8	8	64
			Σfdx $=-2638$	Σfdx^2 $=15542$

நெல்லின் கூட்டுச் சராசரி $= A + \frac{\Sigma f dx}{n} \times C$

$$= 1800{\cdot}5 - \frac{2638}{3061} \times 400$$

$= 1455{\cdot}8$ பவுண்டுகள் (ஏக்கருக்கு)

திட்ட விலக்கம் σ $= C \times \sqrt{\frac{\Sigma f dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f dx}{n}\right)^2}$

$= 400 \times \sqrt{\frac{15542}{306} - \left(\frac{-2638}{3061}\right)^2}$

$= 400 \times \sqrt{4 \cdot 34}$

= **832·2 பவுண்டுகள் (ஏக்கருக்கு)**

மாதிரி 179

கீழ்க் காணும் அட்டவணை இரண்டு தொழிற்சாலைகளில் வேலை செய்பவர்களின் எண்ணிக்கையையும் அவர்களின் வார வருமானத்தையும் தருகிறது. அவ்விரு தொழிற்சாலைகளில் அவர்களின் வார வருமானத்தின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடு.

வார வருமானம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	
	தொழிற்சாலை *A*	தொழிற்சாலை *B*
4–6	74	71
6—8	376	379
8—10	304	303
10—12	110	112
12—14	18	18
14—16	0	1
16—18	9	3
18—20	9	9
20—22	0	4

(எம். ஏ.—கல்கத்தா—1936)

தீர்வு :

தொழிற்சாலை A

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடல்

வார வருமானம்	மத்திய மதிப்பு x	தொழிலாளர் களின் எண் ணிக்கை f_1	dx $(=x-A)$ $A=9$	$f\ dx$	fdx^2
4— 6	5	74	— 4	—296	1184
6— 8	7	376	— 2	—752	1504
8—10	9	304	0	0	0
10—12	11	110	2	220	440
12—14	13	18	4	72	288
14—16	15	0	6	0	0
16—18	17	9	8	72	576
18—20	19	9	10	90	900
20—22	21	0	12	0	0
		$n=900$		$\Sigma fdx = -594$	$\Sigma fdx^2 = 48\ 2$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fdx}{n}$

$$= 9 + \frac{-594}{900}$$

= 8·34 ரூபாய்.

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{4892}{900} - \left(\frac{-594}{900}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4892}{900} - (\cdot 66)^2}$$

= 2·24 ரூபாய்.

தொழிற்சாலை B

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடல்

வார வருமானம்	மத்திய மதிப்பு x	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை f'	$dy = y - B$, $B = 9$	$f'\,dy$	$f'\,dy^2$
4— 6	5	71	—4	—284	1136
6— 8	7	379	—2	—758	1516
8—10	9	303	0	0	0
10—12	11	112	2	224	448
12—14	13	81	4	72	288
14—16	15	1	6	6	36
16—18	17	3	8	24	192
18—20	19	9	10	90	900
20—22	21	4	12	48	576
		$n = 900$		$\Sigma f'dy = 578$	$\Sigma f'\,dy^2 = 5092$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \dfrac{\Sigma f d' y}{n}$

$$= 9 + \frac{-578}{900}$$

$$= 8{\cdot}36 \text{ ரூபாய்.}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma_y = \sqrt{\dfrac{\Sigma f' dy^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma f' dy}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{5092}{900} - \left(\frac{-578}{900}\right)^2}$$

$$= \sqrt{5{\cdot}66 - (.64)^2}$$

$$= 2{\cdot}29 \text{ ரூபாய்.}$$

மாதிரி 180

மாதிரி 167-ல் கொடுத்த கணக்கிற்குத் திட்ட விலக்கத்தைக் காண். பின்பு, சராசரியிலிருந்து $\pm 2\sigma$, எல்லைக்குள் விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்.

(திருவனந்தபுரம்—1951)

தீர்வு :

1000 பேரின் வயதுப் பரவலுக்குரிய திட்ட விலக்கத்தைக் காணல் :

x	f	$dx\ (=x-A)$ $A=37{\cdot}5$	fdx	fdx^2
20—25	33	—3	— 99	297
25—30	112	—2	—224	448
30—35	152	—1	—152	152
35—40	154	0	0	0
40—45	136	1	136	136
45—50	118	2	236	472
50—55	96	3	288	864
55—60	74	4	296	1184
60—65	54	5	270	1350
65—70	37	6	222	1332
70—75	21	7	144	1008
75—80	9	8	72	576
80—85	4	9	36	324
	$n=1000$		$\Sigma fdx = 1228$	$\Sigma fdx^2 = 8143$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C \sqrt{\dfrac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$

$$= 5 \times \sqrt{\frac{8143}{1000} - \left(\frac{1228}{1000}\right)^2}$$

$$= 5 \times \sqrt{\frac{8143000-1507984}{1000^2}}$$

$$= 5 \times \sqrt{\frac{6635016}{1000^2}}$$

$$= \mathbf{12{\cdot}875}$$

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\Sigma fdx}{n}\right) \times C$$

$$= 37{\cdot}5 + \frac{1228}{1000} \times 5$$

$$= 43{\cdot}64$$

$$\bar{x} \pm 2\sigma = 43{\cdot}64 \pm 12{\cdot}875$$

$$= 43{\cdot}64 \pm 25{\cdot}75$$

$$= (69{\cdot}39, \quad 17{\cdot}89)$$

இந்த எல்லைக்குள் விழும் உறுப்பு களின் எண்ணிக்கை $= (33 + 112 + 152 + 154 + 136 + 118 + 96 + 74 + 54 + 37)$

$= \mathbf{966.}$

மாதிரி 181

கீழ்க் காணும் அட்டவணையில் ஒரு வினா-விடைப் போட்டியில் பங்கு பெற்ற 217 மாணவர்களின் விவரம் கொடுக்கப்பட்டிருக் கிறது.

(i) நேரிடை முறை

(ii) கூட்டு முறை ஆகியவற்றின் மூலம் கூட்டுச் சராசரியை யும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடு.

மதிப்பெண்கள்	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
மாணவர்கள்	3	7	22	60	85	32	8

தீர்வு :

(i) நேரிடை முறை :

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காணல் :

பிரிவு	அலை வெண் f	$dx\left(=\frac{x-A}{C}\right)$ $A=6{\cdot}5$ $C=1$	fdx	fdx^2
3— 4	3	—3	— 9	7
4— 5	7	—2	—14	28
5— 6	22	—1	—22	22
6— 7	60	0	0	0
7— 8	85	1	85	85
8— 9	32	2	64	128
9—10	8	3	24	72
மொத்தம்	217		$\Sigma fdx = 128$	$\Sigma fdx^2 = 363$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n} \times C$

$$= 6{\cdot}5 + \frac{128}{217} \times 1$$

$$= 6{\cdot}5 + 0{\cdot}5898$$

$$= \mathbf{7{\cdot}0898}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$

$$= 1 \times \sqrt{\frac{363}{217} - \left(\frac{128}{217}\right)^2}$$

$$= 1 \times \sqrt{1{\cdot}673 - 0{\cdot}3478}$$

$$= \sqrt{1{\cdot}3252}$$

$= 1{\cdot}15$ மதிப்பெண்கள்.

(ii) கூட்டு முறை :

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காணல் :

பிரிவு	மாணவர்கள் f	$c{\cdot}f$	$c\,(c{\cdot}f)$
3— 4	3	3	3
4— 5	7	10	13
5— 6	22	32	45
6— 7	60	92	137
7— 8	85	177	314
8— 9	32	209	523
9—10	8	217	740
	$n = 217$	740	1775

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க்காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$C = 1 \;;\; M = 9{\cdot}5 \;;\; f_1 = \frac{740}{217} = 3{\cdot}4 \;;\; f_2 = \frac{1775}{217} = 8{\cdot}1$$

கூட்டு முறைச் சூத்திரம் $\overline{x} = M - C(f_1 - 1)$

$= 9{\cdot}5 - 1 \times (3{\cdot}4 - 1)$

$= 9{\cdot}5 - 2{\cdot}4$

$= 7{\cdot}1$

கூட்டு முறைச் சூத்திரம் $\sigma = C \times \sqrt{2f_2 - f_1 - (f_1)^2}$

$= 1 \times \sqrt{2 \times 8{\cdot}1 - 3{\cdot}4 - (3{\cdot}4)^2}$

$= \sqrt{16{\cdot}2 - 3{\cdot}4 - 11{\cdot}56}$

$= \sqrt{1{\cdot}24}$

$= 1{\cdot}15$

ஆகவே இரு முறைகளிலும் ஒரே விடையைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 112

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலுள்ள விவரங்களுக்கு,

(1) நேரிடை முறையிலும்

(2) கூட்டு முறையிலும்

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடு.

பிரிவு (x)	1·5 – 2·5	2·5—3·5	3·5—4·5	4·5—5·5
அலைவெண் (f)	3	4	5	8
பிரிவு (x)	5·5—6·5	6·5—7·5	7·5—8·5	
அலைவெண் (f)	7	6	3	

தீர்வு :

(i) நேரிடை முறை :

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடல் :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் f	$dx\,(=x-A)$ $A=5$	fdx	fdx^2
1·5—2·5	2	3	—3	—9	27
2·5—3·5	3	4	—2	—8	16
3·5—4·5	4	5	—1	—5	5
4·5—5·5	5	8	0	0	0
5·5—6·5	6	7	1	7	7
6·5—7·5	7	6	2	12	24
7·5—8·5	8	3	3	9	27
		$n=36$		$\Sigma fdx = 6$	$\Sigma fdx^2 = 106$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fdx}{n}$

$= 5+\frac{6}{36}$

$= 5+0{\cdot}17$

$= 5{\cdot}17$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C\times\sqrt{\dfrac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$

$= 1\times\sqrt{\dfrac{106}{36} - \left(\dfrac{6}{36}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{106-1}{36}}$

$= 1{\cdot}71$ (தோராயமாக)

(ii) கூட்டு முறை :

கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடல் :

பிரிவு	அலைவெண் f	$c \cdot f$	$c\,(c \cdot f)$
1·5—2·5	3	3	3
2·5—3·5	4	7	10
3·5—4·5	5	12	22
4·5—5·5	8	20	42
5·5—6 5	7	27	69
6·5—7·5	6	33	102
7·5—8·5	3	36	138
	36	138	386

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க்காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$C = 1 \qquad f_1 = \frac{138}{36} = 3{\cdot}83$

$M = 8 \qquad f_2 = \frac{386}{36} = 10{\cdot}72$

கூட்டு முறைக்
கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = M - C\,(f_1 + 1)$

$$\therefore \bar{x} = 8 - 1 \times (3{\cdot}83 - 1)$$
$$= 8 - 2{\cdot}83$$
$$= \mathbf{5{\cdot}17}$$

கூட்டு முறைத்
திட்ட விலக்கம் $\sigma = i\sqrt{2f_2 - f_1 - (f_1)^2}$

$$= 1 \times \sqrt{2 \times 10{\cdot}72 - 3{\cdot}83 - (3{\cdot}83)^2}$$
$$= \sqrt{21{\cdot}44 - 3{\cdot}83 - 14{\cdot}44}$$
$$= \sqrt{3{\cdot}17}$$
$$= \mathbf{1{\cdot}71} \text{ (தோராயமாக)}$$

இவ்விரு முறைகளிலும் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகிய மதிப்புகள் மாருமல் சரியாகக் கிடைக்கப் பெறுகிறோம்.

மாதிரி 183

கீழ்க்காணும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும்,

(1) நேர்வழி மூலமும், (2) கூட்டுமுறை மூலமும் கணக்கிட்டு ஒப்பிடுக.

பிரிவு	அலைவெண்	பிரிவு	அலைவெண்
310—319	1	250—259	11
300—309	2	240—249	8
290—299	4	230—239	2
280—289	1	220—229	0
270—279	6	210—219	3
260—269	12		

(எம்.ஏ.—உளவியல்—ஆக்ரா—1964)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

பிரிவு	f	dx	fdx	fdx^2
310—319	1	5	5	25
300—309	2	4	8	32
290—299	4	3	12	36
280—289	1	2	2	4
270—279	6	1	6	6
260—269	12	0	0	0
250—259	11	—1	—11	11
240—249	8	—2	—16	32
230—239	2	—3	— 6	18
220—229	0	—4	— 0	0
210—219	3	—5	—15	75
	50		$\Sigma fdx = -15$	$\Sigma fdx^2 = 239$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx}{n} \times C$

$$= 264{\cdot}5 + \frac{-15}{50} \times 10$$

$$= 264{\cdot}5 + \frac{-150}{50} = \mathbf{261{\cdot}5}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma f dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f dx}{n}\right)^2}$

$$= 10 + \sqrt{\frac{239}{50} - \left(\frac{-15}{50}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{239}{50} - \frac{225}{2500}}$$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{11950 - 225}{2500}}$$

$$= \frac{1}{5} \times 108{\cdot}28 = \mathbf{21{\cdot}656}$$

(ii) கூட்டு முறை : கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

பிரிவு	f	$c.f$	$c(c.f)$
310—319	1	50	315
300—309	2	49	265
290—299	4	47	216
280—289	1	43	169
270—279	6	42	126
260—269	12	36	84
250—259	11	24	48
240—249	8	13	24
230—239	2	5	11
220—229	0	3	6
210—219	3	3	3
	$n = 50$	315	1267

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க்காணும் மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன :

$$C = 10, \qquad f_1 = \frac{315}{50} = 6\cdot3$$

$$M = 314\cdot5 \qquad f_2 = \frac{1267}{50} = 25\cdot34$$

கூட்டுமுறைச் சூத்திரம்,
கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = M - C\,(f_1 - 1)$

$$\therefore\ \bar{x} = 314\cdot5 - 10\,(6\cdot3 - 1)$$
$$= 314\cdot5 - 53$$
$$= \mathbf{261\cdot5}$$

கூட்டு முறையில் திட்ட
விலக்கச் சூத்திரம் $\sigma = C \times \sqrt{2f_2 - f_1 - (f_1)^2}$

$$= 10 \times \sqrt{2 \times 25\cdot34 - (6\cdot3 - 39\cdot69)}$$
$$= 10 \times 2\cdot1656$$
$$= \mathbf{21\cdot656}$$

இரு முறையிலும் ஒரே விடையைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 184

கீழ்க்காணும் தொடர் பகுதி அலைவெண் பரவலுக்குச் சரியான மூலத்தையும் பிரதியளவையும் (scale) கொண்டு, கணக்கிடப்பட்ட கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் முறையே 135·3 £, 9·6 £ ஆகும். உண்மையான பிரிவு இடைவெளியைக் (class interval) கண்டறிக.

x :	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	மொத்தம்
f :	2	5	8	18	22	13	8	4	80

(ஐ. ஏ. எஸ்.—1952)

தீர்வு :

பிரிவு இடைவெளியைக் கணக்கிடல் :

அலைவெண் f	படி விலக்கம் dx'	$\Sigma fdx'$	fdx'^2
2	—4	— 8	32
5	—3	—15	45
8	—2	—16	32
18	—1	—18	18
22	0	0	0
13	1	13	13
8	2	16	32
4	3	12	36
$\Sigma f = 80$		$\Sigma fdx' = -16$	$\Sigma fdx'^2 = 208$

இக் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டவை:

$$\bar{x} = 135{\cdot}3 \qquad \sigma = 9{\cdot}6$$

ஆகவே,
$$9{\cdot}6 = \sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fdx'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fdx'}{\Sigma f}\right)^2}$$

$$ie., 9{\cdot}6 = C\sqrt{\frac{208}{80} - \left(\frac{-16}{80}\right)^2}$$

அல்லது
$$9{\cdot}6 = C \times \sqrt{\frac{13}{5} - \frac{1}{25}}$$

$$= C \times \sqrt{\frac{64}{25}}$$

$$9{\cdot}6 = C \times \frac{8}{5}$$

அல்லது $$C = \frac{9{\cdot}6 \times 5}{8}$$

$$\therefore \; C = \mathbf{6}$$

A ஐக் கணக்கிடல் :

இங்கு, $$\bar{x} = 135{\cdot}3$$

$$135{\cdot}3 = \bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx'}{\Sigma f} \times C$$

அல்லது $$135{\cdot}3 = A + \left(\frac{-16}{80} \times 6\right)$$

$$135{\cdot}3 = (A - 1{\cdot}2)$$

$$\therefore \; A = \mathbf{136{\cdot}5}$$

ஆகவே, (22)ஐ அலைவெண்ணாகக் கொண்டுள்ள பிரிவின் மத்திய மதிப்பு 136·5 என்றும், அதன் இடைவெளி 6 என்றும் காண்கிறோம்.

∴ இந்தப் பிரிவு (136·5—3), (136·5+3); i.e.; **133·5—139·5** இவ்வழியே மற்றப் பிரிவுகளையும் கணக்கிடலாம்.

ஆகவே, மற்றப் பிரிவுகள் (109·5—115·5), (115·5—121·5)... ... ... (133·5—139·5) .... (151·5—157·5) எனக் கண்டறியலாம்.

மாதிரி 185

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலுள்ள பரவலுக்கு

(1) கூட்டுச் சராசரி, (2) திட்ட விலக்கம், (3) சார்லியரின் சோதனை ஆகியவற்றைக் காண்.

அளவு x :	12	13	14	15	16	17	18	19	20
அலைவெண் f :	4	19	30	63	66	69	18	1	1

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், சார்லியரின் சோதனை ஆகியவற்றைக் காணல் :

அளவு x	அலை வெண் f	ஊகச் சராசரி ($A=16$) -லிருந்து விலக்கம் dx	fdx	fdx^2	$(dx+1)$	$f(d+1)^2$
12	4	—4	—16	64	—3	36
13	19	—3	—57	171	—2	76
14	30	—2	—60	120	—1	30
15	63	—1	—63	63	0	0
16	66	0	0	0	1	66
17	29	1	29	29	2	116
18	18	2	36	72	3	162
19	1	3	3	9	4	16
20	1	4	4	16	5	25
	$n=231$		$\Sigma fdx = -124$	$\Sigma fdx^2 = 544$		$\Sigma f(d+1)^2 = 527$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fdx}{n} \times C$

$$\therefore \bar{x} = 16 + \frac{-124}{231} \times 1$$

$$= 15{\cdot}47$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\dfrac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{\frac{544}{231} - \left(\frac{-124}{231}\right)^2}$$
$$= \sqrt{2{\cdot}35 - 0{\cdot}28}$$
$$= \mathbf{1{\cdot}44}$$

சார்லியரின் சோதனை :

$$\Sigma f(d+1)^2 = \Sigma fd^2 + 2\Sigma fd + \Sigma f$$

பட்டியலிலிருந்து,

$$527 = 544 + (2 \times -124) + 231$$
$$= 544 - 248 + 231$$
$$= \mathbf{527}$$

சார்லியரின் சோதனை மூலம் கணக்கிடும் முறை சரியெனக் காண்கிறோம்.

மாறுவிகிதக் கெழு
(Coefficient of Variation)

மாதிரி 186

கீழ்க்காணும் அட்டவணை 100 நிறுவனங்களின் இலாப இழப்புகளைத் தருகிறது. இரு நிறுவனங்களின் தனித்தனி கூட்டுச் சராசரிகளையும் திட்ட விலக்கங்களையும் காண்.

இலாபம்	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை	இலாபம்	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை
5000—6000	8	0 —1000	5
4000—5000	12	—1000 — 0	6
3000—4000	30	—2000— —1000	8
2000—3000	10	—3000— —2000	9
1000—2000	5	—4000— —3000	7

(பி. என். எல். ஹேறன்ஸ்)

தீர்வு :

இலாபங்களின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் கணக்கிடல் :

இலாபங்கள்	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை	ஊகச் சராசரி (1500)-லிருந்து படி விலக்கம் $d'x$	$fd'x$	$fd'x^2$
5000 — 6000	8	4	32	128
4000 — 5000	12	3	36	108
3000 — 4000	30	2	60	120
2000 — 3000	10	1	10	10
1000 — 2000	5	0	0	0
0 — 1000	5	—1	— 5	5
—1000 — 0	6	—2	—12	24
—2000 — —1000	8	—3	—24	72
—3000 — —2000	9	—4	—36	144
—4000 — —3000	7	—5	—35	175
			$\Sigma fd'x = 26$	$\Sigma fd'x^2 = 786$

கூட்டுச் சராசரி

அல்லது $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx'}{n} \times C$

$= 1500 + \frac{26}{100} \times 1000$

$= 1500 + 260$

$= 1760$ ரூபாய்.

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{786}{100} - \left(\frac{26}{100}\right)^2} \times 1000$

$= \sqrt{7{\cdot}86 - 0{\cdot}0676} \times 1000$

$\sqrt{7{\cdot}7924} \times 1000$

$= 2{\cdot}791 \times 1000$

$=$ **2791** ரூபாய்.

மாதிரி 187

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியையும் மாறுபாட்டையும் கணக்கிடுக.

கூலி	தொழிற்சாலை *A*-ல் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	தொழிற்சாலை *B*-ல் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
ரூ. 40-க்குக் குறைவாக	30	45
ரூ. 40-க்கு அதிகமான ஆனல் ரூ. 80-க்குக் குறைவான	25	35
ரூ. 80-க்கு அதிகமான ஆனல் ரூ. 120-க்குக் குறைவான	30	25
ரூ. 120-க்கு அதிகமான ஆனல் ரூ. 160-க்குக் குறைவான	45	40
ரூ. 160-க்கு அதிகமான ஆனல் ரூ 200-க்குக் குறைவான	25	25
ரூ. 200-க்கு அதிகமான ஆனல் ரூ. 240-க்குக் குறைவான	13	20
ரூ. 240-க்கு அதிகமான ஆனல் ரூ. 280-க்குக் குறைவான	24	5
ரூ. 280-க்கு அதிகமான ஆனல் ரூ. 320-க்குக் குறைவான	8	5
மொத்தம்	200	200

தீர்வு :

கூலி (ரூபாயில்)	மத்திய மதிப்பு x	$(A=180)$ -லிருந்து படி விலக்கம் dx'	தொழிற்சாலை A			தொழிற்சாலை B		
			தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	fdx'	fdx'^2	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	$f'dx'$	$f'dx'^2$
0—40	20	—4	30	—820	480	45	—180	720
40—80	60	—3	25	—75	225	35	—105	315
80—120	100	—2	30	—60	120	25	—50	100
120—160	140	—1	45	—45	45	40	—40	40
160—200	180	0	25	0	0	25	50	0
200—240	220	1	13	13	13	20	20	20
240—280	260	2	24	48	96	5	10	20
280—320	300	3	8	24	72	5	15	45
			$n=200$	—215	1051	$n=200$	—330	1260

தொழிற்சாலை A :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx'}{n} \times C$

$= 180 + \frac{-215}{200} \times 40$

$= 137$ ரூபாய்.

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma f dx'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f dx'}{n}\right)^2}$

$= 40 \times \sqrt{\frac{1051}{200} - \left(\frac{-215}{200}\right)^2}$

$= 80{\cdot}8$ ரூபாய்

மாறுபாடு $\sigma^2 = (80{\cdot}8)^2$

$= 6528{\cdot}64$ ரூபாய்.

தொழிற்சாலை B :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f' dx'}{n} \times C$

$= 180 + \frac{-330}{200} \times 40$

$= 114$ ரூபாய்.

திட்ட விலக்கம் $\sigma' = C \times \sqrt{\frac{\Sigma f' dx'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f' dx'}{n}\right)^2}$

$= 40 \times \sqrt{\frac{1260}{200} - \left(\frac{-330}{200}\right)^2}$

$= 75{\cdot}6$ ரூபாய்.

$\therefore$ மாறுபாடு $\sigma'^2 = (75{\cdot}6)^2$

$= 5715{\cdot}36$ ரூபாய்.

மாதிரி 188

பின்வரும் அட்டவணைக்குக் கூட்டுச் சராசரியின் திட்ட விலக்கத்தையும் மாறு விகிதக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

செலவு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
ரூ. 5-க்குக் குறைவாக	6
ரூ 10-க்குக் குறைவாக	16
ரூ. 15-க்குக் குறைவாக	28
ரூ. 20-க்குக் குறைவாக	38
ரூ. 25-க்குக் குறைவாக	46

(பி.காம்.—சென்னை)

தீர்வு :

முதலில் மேற்கண்ட அட்டவணையை அலைவெண் பரவல் அட்டவணையாக மாற்றுகிறோம். பின்பு, கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், மாறு விகிதக் கெழு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுகிறோம்.

செலவு (ரூபாயில்)	மத்திய மதிப்பு x	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f	ஊகச்சராசரி ($A=12{\cdot}5$) யிலிருந்து படி விலக்கம் dx'	$fd'x$	$fd'x^2$
0— 5	2·5	6	—2	—12	24
5—10	7·5	10	—1	—10	10
10—15	12·5	12	0	0	0
15—20	17·5	10	1	10	10
20—25	22·5	8	2	16	32
		$\Sigma f=46$		$\Sigma fd'x=4$	$\Sigma fd'x^2=76$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$

$= 12{\cdot}5 + \frac{4}{46} \times 5$

$= 12{\cdot}94$ ரூபாய்

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'x}{n}\right)^2}$

$= 5 \times \sqrt{\frac{76}{46} - \left(\frac{4}{46}\right)^2}$

$= 6{\cdot}5$ ரூபாய் (தோராயமாக)

மாறு விகிதக் கெழு (C. V.) $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{6{\cdot}5}{12{\cdot}94} \times 100$

$= 50{\cdot}2\%$

மாதிரி 189

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு

(1) கூட்டுச் சராசரி (2) திட்ட விலக்கம் (3) மாறு விகிதக் கெழு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

(Histogram and less than Ogiv)

பிரிவு (x)	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
அலைவெண் f	7	19	43	52	40	15	3

(பி.எஸ்ஸி.—சென்னை—1972)

தீர்வு:

கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், மாறுவிகிதக் கெழு காணல் :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	அலை வெண் f	ஊகச் சராசரி ($A = 27 \cdot 5$) யிலிருந்து படி விலக்கம் $d'x$	$fd'x$	$fd'x^2$
10—15	12·5	7	—3	—21	63
15—20	17·5	19	—2	—38	76
20—25	22·5	43	—1	—43	43
25—30	27·5	52	0	0	0
30—35	32·5	40	1	40	40
35—40	37·5	15	2	30	60
40—45	42·5	4	3	12	36
மொத்தம்		180		—20	318

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{n} \times C$

$$= 27 \cdot 5 + \frac{-20}{180} \times 5$$

$$= 27 \cdot 5 + \left(\frac{100}{180} \right)$$

$$= \mathbf{28 \cdot 056}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C \sqrt{\frac{\Sigma fd'x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'x}{n} \right)^2}$

$$= 5 \sqrt{\frac{318}{180} - \left(\frac{-20}{180} \right)^2}$$

$$= 5 \times \sqrt{1 \cdot 77 - 0 \cdot 0123}$$

$$= \mathbf{6 \cdot 60}$$

மாறு விகிதக் கெழு $C.V. = \frac{\sigma}{x} \times 100$

$$\frac{6 \cdot 6}{28 \cdot 056} \times 100$$

$= \mathbf{23 \cdot 5}$ **(தோராயமாக)**

மாதிரி 190

கீழ்க் காணும் இலைகளின் அகலங்களின் (சென்டி மீட்டரில்) பரவலுக்கு, திட்ட விலக்கத்தையும், மாறுவிகிதக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

அகலம் (சென்டி மீட்டரில்)	12—15	16—19	20—23	24—27
அலைவெண்	3	9	12	15
அகலம் (சென்டி மீட்டரில்)	28—31	32—35	36—39	40—43
அலைவெண்	28	21	11	1

(பி. ஏ.—சென்னை—1971 செப்.)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கத்தையும் மாறுவிகிதக் கெழுவையும் கணக்கிடல் :

அகலம் (சென்டி மீட்டரில்)	மத்திய மதிப்பு x	அலை வெண் f	ஊகச் சராசரி $(A=25\cdot5)$ யிலிருந்து படி விலக்கம் $d'x$	$fd'x$	$fd'x^2$
12—15	13·5	3	—3	— 9	27
16—19	17·5	9	—2	—18	36
20—23	21·5	12	—1	—12	12
24—27	25·5	15	0	0	0
28—31	29·5	28	1	28	28
32—35	33·5	21	2	42	84
36—39	37·5	11	3	33	99
40—43	41·5	1	4	4	16
மொத்தம்		100		68	203

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{\Sigma f} \times C$$

$$= 25{\cdot}5 + \frac{68}{100} \times 4$$

$$= 25{\cdot}5 + 2{\cdot}72$$

$$= \mathbf{28{\cdot}22}$$

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma = C\sqrt{\frac{\Sigma fd'x^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'x}{\Sigma f}\right)^2}$$

$$= 4\sqrt{\frac{302}{100} - \left(\frac{68}{100}\right)^2}$$

$$= 4 \times \sqrt{2{\cdot}5576}$$

$$= \mathbf{5{\cdot}00}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{மாறு விகிதக்}\\ \text{கெழு C. V.}\end{array}\right\} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{5{\cdot}0}{28{\cdot}22} \times 100$$

$$= \mathbf{17{\cdot}7}$$

மாதிரி 191

பின்வரும் பட்டியல் ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் வாரச் சம்பளப் பரவலாகும். அப் பரவலின் மாறுவிகிதக் கெழுவைக் காண்க.

வாரச் சம்பளம் (ரூபாயில்) மைய மதிப்பு	38	44	50	65	62	68	74	80	86
நிகழ் வெண்	27	72	135	170	285	175	96	28	12

(பி. ஏ.—மதுரை—1971)

தீர்வு :

மாறுவிகிதக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

வாரச் சம்பளம் (ரூபாயில்)	அலைவெண் f	ஊகச் சராசரி ($A=62$) யிலிருந்து படி விலக்கம் $d'x$	$fd'x$	$fd'x^2$
38	27	—4	—108	432
44	72	—3	—216	648
50	135	—2	—270	540
56	170	—1	—170	170
62	285	0	0	0
68	175	1	175	175
74	96	2	192	384
80	28	3	84	252
86	12	4	48	192
	1000		—265	2793

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{\Sigma f} \times C$

$$= 62 + \frac{-265}{1000} \times 6$$

$$= 62 - 1{\cdot}59$$

$$= 60{\cdot}41$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d'x^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f d'x}{\Sigma f}\right)^2}$

$= 6\sqrt{\frac{2793}{1000} - \left(\frac{-265}{1000}\right)^2}$

$= 6 \times \sqrt{2 \cdot 722775}$

$=$ **9·90**

மாறுவிகிதக் கெழு $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{9 \cdot 9}{60 \cdot 41} \times 100$

$=$ **16·39**

மாதிரி 192

கீழ்க் காணும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குத் திட்ட விலக்கத்தையும் மாறு விகிதக் கெழுவையும் கணக்கிடு.

மதிப்பெண்கள்	0–10	10–20	20 - 30	30–40
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	5	10	20	40
மதிப்பெண்கள்	40–50	50–60	60–70	70–80
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	30	20	10	4

(பி.காம்.—சென்னை—1951)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம், மாறு விகிதக் கெழு கணக்கிடல் :

மதிப்பெண் பிரிவுகள்	மத்திய மதிப்பு x	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை f	ஊகச் சராசரி ($A=35$) யிலிருந்து படி விலக்கம் dx	$fd'x$	$fd'x^2$
0—10	5	5	—3	—15	45
10—20	15	10	—2	—20	40
20—30	25	20	—1	—20	20
30—40	35	40	0	0	0
40—50	45	30	1	30	30
50—60	55	20	2	40	80
60 - 70	65	10	3	30	90
70—80	75	4	4	16	64
		$\Sigma f=139$		$\Sigma fd'x = 61$	$\Sigma fd'x^2 = 369$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'x}{\Sigma f} \times C$

$$= 35 + \frac{61}{139} \times 10$$

= **39·5 மதிப்பெண்கள்**

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C\sqrt{\frac{\Sigma fd'x^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fdx}{\Sigma f}\right)^2}$

$$\therefore \quad \sigma = 10\sqrt{\frac{369}{139} - \left(\frac{61}{139}\right)^2}$$

= **15·6 மதிப்பெண்கள்.**

மாறு விகிதக்கெழு $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{15{\cdot}6}{39{\cdot}5} \times 100$$

= **39·2**

மாதிரி 193

மாதிரி 153-ல் கொடுத்துள்ள விவரங்களுக்கு (1) கூட்டுச் சராசரி (2) திட்ட விலக்கம் (3) மாறுவிகிதக் கெழு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக.

(சென்னை—பல்கலை)

தீர்வு :

மாதிரி 153—லிருந்து கீழ்க் காண்பவற்றைக் கணக்கிடுகிறோம்.

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d'x}{\Sigma f} \times C$

$= 50 + \frac{-15}{542} \times 10$

$= 49 \cdot 7$ வருடங்கள் (தோராயமாக)

மாதிரி 153-ல் திட்ட விலக்கம் σ } $=$ 11·6 வருடங்கள் (தோராயமாக)

மாறுவிகிதக் கெழு $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{11 \cdot 6}{49 \cdot 7} \times 100$

$= 23 \cdot 3$

மாதிரி 194

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்கு $\bar{x} \pm \sigma; \bar{x} \pm 2\sigma; \bar{x} \pm 3\sigma$ எல்லைக்குள் விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையையும், சதவீதத்தையும் கணக்கிடு.

அளவு	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
அலைவெண்	1	0	1	5	6	8	14	5	6	4

(பி. காம்.—சென்னை)

தீர்வு :

$\bar{x} \pm \sigma$; $\bar{x} \pm 2\sigma$; $\bar{x} \pm 3\sigma$ எல்லைகளையும், அதற்குள் விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையையும், சத வீதத்தையும் கணக்கிடல் :

அளவு x	அலைவெண் f	ஊகச் சராசரி ($A=5$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	fdx	fdx^2
10	1	5	5	25
9	0	4	0	0
8	1	3	3	9
7	5	2	10	20
6	6	1	6	6
5	8	0	0	0
4	14	—1	—14	14
3	5	—2	—10	20
2	6	—3	—18	54
1	4	—4	—16	64
	50		—34	212

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$$= 5 + \frac{-34}{50}$$

$$= 4{\cdot}32$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{212}{50} - \left(\frac{-34}{50}\right)^2}$$

$$= 1{\cdot}94$$

σ எல்லைகளைக் கணக்கிடல் :

(1) $\bar{x} \pm \sigma = (4{\cdot}32+1{\cdot}94) \quad (4{\cdot}32-1{\cdot}94)$

$= (6{\cdot}26, \quad 2{\cdot}32)$

(6·26, 2·32) இடையே விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= 33$

அதாவது $= \frac{33}{50} \times 100$

$= 66\%$

(2) $\bar{x} \pm 2\sigma = (4{\cdot}32 + 2\times1{\cdot}94) \quad (4{\cdot}32-2\times1{\cdot}94)$

$= (4{\cdot}34+3{\cdot}88), \quad (4{\cdot}34-3{\cdot}88)$

$= (8{\cdot}20, \quad 0{\cdot}44)$

(8·20, 0·44) இடையே விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= 49$

அதாவது $= \frac{49}{50} \times 100$

$= 98\%$

(3) $\bar{x} \pm 3\sigma = (4{\cdot}32+3\times1{\cdot}94), \quad (4{\cdot}32-3\times1{\cdot}94)$

$= (4{\cdot}32+5{\cdot}82), \quad (4{\cdot}32-5{\cdot}82)$

$= (10{\cdot}4, \quad -1{\cdot}50)$

(10·4, −1·50)-க்கு இடையே விழும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$= 50$

அதாவது $= \frac{50}{50} \times 100$

$= 100\%$

மாதிரி 195

கீழ்க் காணும் அட்டவணையிலுள்ள இரண்டு வரிசைக்கும் திட்ட விலக்கம் காண். எந்த வரிசை அதிக விலக்கத்தைக் காட்டுகிறது?

A வரிசை	192	288	236	229	184
B வரிசை	83	87	93	109	124

A வரிசை	260	348	291	330	243
B வரிசை	126	126	101	102	108

(பி. சி. எஸ்.—1938)

தீர்வு :

இரு வரிசைகளுக்கும் திட்ட விலக்கத்தையும் மாறுவிகிதக் கெழுவையும் காணல் :

A வரிசை			*B* வரிசை		
உறுப்புகளின் அளவு x	ஊகச் சராசரி $(A=260)$ யிலிருந்து விலக்கம் dx	விலக்கங்களின் வர்க்கம் dx^2	உறுப்புகளின் அளவு y	ஊகச் சராசரி $(B=105)$ யிலிருந்து விலக்கம் dy	விலக்கங்களின் வர்க்கம் dy^2
192	—68	4624	83	—22	484
288	28	784	87	—18	324
236	—24	576	93	—12	144
229	—31	619	109	4	16
184	—76	5776	124	19	361
260	0	0	126	21	441
348	88	7744	126	21	441
391	31	961	101	— 4	16
330	70	4900	102	— 3	9
243	—17	289	108	3	9
$\Sigma x = 2601$		$\Sigma dx^2 = 26615$	$\Sigma y = 1059$		$\Sigma dy^2 = 2245$

A வரிசை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{2601}{10}$

$= 260{\cdot}1$

திட்ட விலக்கம் σ $= \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{x}-A)^2}$

$= \sqrt{\frac{26615}{10} - (260{\cdot}1-260)^2}$

$= \sqrt{\frac{26615-10\,({\cdot}1)^2}{10}}$

$= \sqrt{\frac{26614{\cdot}9}{10}} = \sqrt{2661{\cdot}49}$

$= 51{\cdot}6$ (தோராயமாக)

மாறுவிகிதக் கெழு $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{51{\cdot}6}{260{\cdot}1} \times 100$

$= 19{\cdot}8$

B வரிசை :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n}$

$= \frac{1059}{10}$

$= 105{\cdot}9$

திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n} - (\bar{y}-B)^2}$

$= \sqrt{\frac{2245}{10} - (105 \cdot 9 - 105)^2}$

$= \sqrt{224 \cdot 5 - 0 \cdot 81} = \sqrt{223 \cdot 69}$

$= \mathbf{14 \cdot 96}$

மாறுவிகிதக் கெழு $C.\,V. = \frac{\sigma}{\bar{y}} \times 100$

$= \frac{14 \cdot 96}{105 \cdot 9} \times 100$

$= \mathbf{14 \cdot 1}$

மாதிரி 176

'அ', 'ஆ' என்ற இரு கால்∴ப் ஆட்டக்காரர்கள் 12 ஆட்டங்களில் எடுத்துள்ள வெற்றிப் புள்ளிகள் கீழே தரப்பட்டு உள்ளன. யார் திறமையாக ஆடுபவர் என்றும், யார் மிகை யான நிலைப்புத்தன்மை உடையவர் எனவும் காண்.

அ :	74	75	78	72	78	77	79	81	79	76	72	71
ஆ :	87	84	80	88	89	85	86	82	82	79	86	80

(—சீதாராமன்—)

திறமையை அவர்களின் உயர்ந்த கூட்டுச் சராசரி மூலம் கணக்கிடுகிறோம். ஆட்டத்தின் மிகையான நிலைப்புத் தன்மையை அவர்களின் குறைவான மாறுவிகிதக் கெழுவின் மூலம் காண் கிறோம்.

வரிசை எண்	அ—ஆட்டக்காரர்			‘ ஆ ’—ஆட்டக்காரர்		
	வெற்றிப் புள்ளிகள் x	ஊகச் சராசரி ($A=75$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	விலக்க வர்க்கம் dx^2	வெற்றிப் புள்ளிகள் y	ஊகச் சராசரி ($B=85$) யிலிருந்து விலக்கம் dy	விலக்க வர்க்கம் dy
1	74	—1	1	87	2	4
2	75	0	0	84	—1	1
3	78	3	9	80	—5	25
4	72	—3	9	88	3	9
5	78	3	9	89	4	16
6	77	2	4	85	0	0
7	79	4	16	86	1	1
8	81	6	36	82	—3	9
9	79	4	16	82	—3	9
10	76	1	1	79	—6	36
11	72	—3	9	86	1	1
12	71	—4	16	80	—5	25
	$n=12$	$\Sigma dx=12$	$\Sigma dx^2=126$	$n=12$	$\Sigma dy = -14$	$\Sigma dy^2=136$

ஆட்டக்காரர் 'அ' :

வெற்றிப் புள்ளிகளின் கூட்டுச் சராசரி $\overline{x} = 4 + \frac{\Sigma fx}{n}$

$= 75 + \frac{12}{12}$

$= 76$ வெற்றிப் புள்ளிகள்

திட்ட விலக்கம் $\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{126}{12} - \left(\frac{12}{12}\right)^2}$

$= \sqrt{9 \cdot 5}$

$= 3 \cdot 08$ வெற்றிப் புள்ளிகள்

மாறு விகிதக் கெழு C. V. $= \frac{\sigma_x}{x} \times 100$

$= \frac{3 \cdot 08}{76} \times 100$

$= 4 \cdot 0\%$

ஆட்டக்காரர் 'ஆ' :

வெற்றிப் புள்ளிகளின் கூட்டுச் சராசரி $\overline{y} = B + \frac{\Sigma dy}{n}$

$= 85 + \frac{-14}{12}$

$= 85 - \frac{14}{12}$

$= 83 \cdot 8$ வெற்றிப் புள்ளிகள்

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dy}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{136}{12} - \left(\frac{-14}{12}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9\cdot89}$$

$$= 3\cdot14 \text{ வெற்றிப் புள்ளிகள்}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{வெற்றிப் புள்ளிகள் மாறு விகிதக்}\\ \text{கெழு } C.V.\end{array}\right\} = \frac{\sigma_y}{y} \times 100$$

$$= \frac{3\cdot14}{83\cdot8} \times 100$$

$$= 3\cdot7\%$$

முடிவு :

ஆட்டக்காரர் 'அ'-ன் கூட்டுச் சராசரி 76·0, ஆனால் ஆட்டக்காரர் 'ஆ'-ன் வெற்றிப் புள்ளிகளின் கூட்டுச் சராசரி 83·8; இதில் 76·0 < 83·8; ஆகவே, ஆட்டக்காரர் 'ஆ', மிகத் திறமையாக ஆடக்கூடியவர் என முடிவு செய்கிறோம்.

ஆட்டக்காரர் 'அ'-ன் மாறுவிகிதக் கெழு 4·0%, ஆனால் ஆட்டக்காரர் 'ஆ'-ன் மாறுவிகிதக் கெழு 3·7% அதில் 4·0 > 3·7; ஆகவே ஆட்டக்காரர் 'ஆ' மிகையான நிலைப்புத் தன்மை உடையவர் என முடிவு செய்கின்றோம். ஆகவே, ஆட்டக்காரர் 'ஆ' திறமையும் மிகையான நிலைப்புத்தன்மையும் உடையவர்.

மாதிரி 197

கீழ்க் காணும் இரண்டு பங்குகளில் எந்தப் பங்கு அதிக மாறுபாடு கொண்டுள்ளது ?

கோஹினூர் : 618, 619, 616, 623, 620, 624, 622, 625, 622, 625, 626, 625.

டாடா டெஃபர் : $2152\frac{1}{2}$, $2131\frac{1}{2}$, $2134\frac{1}{4}$, $2132\frac{1}{2}$, 2145, $2142\frac{1}{2}$, $2146\frac{1}{4}$, 2130, $2146\frac{1}{4}$, $2142\frac{1}{2}$, 2150, 2135, $2152\frac{1}{2}$.

(பி.காம். — பம்பாய் — 1945)

தீர்வு : இரண்டு பங்குகளின் வரிசைகளுக்கு மாறு விகிதக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

வரிசை எண்	கோஹினூர்			டாடா டெஃபர்		
	பங்கின் விலை x	ஊகச் சராசரி ($A=622$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	விலக்க வர்க்கம் dx^2	பங்கின் விலை y	ஊகச் சராசரி ($B=2142{\cdot}5$) யிலிருந்து விலக்கம் dy	விலக்க வர்க்கம் dy^2
1	618	—4	16	2152·5	10	100
2	619	—3	9	2132 5	—10	100
3	616	—6	36	2134·25	— 8·25	68·06
4	623	1	1	2132·5	—10	100
5	620	—2	4	2145·0	— 2·5	6·25
6	624	2	4	2142·5	0	0
7	622	0	0	2146 25	3·75	14·06
8	625	3	9	2130·0	—12·5	156·25
9	622	0	0	2146·25	3·75	14·06
10	625	3	9	2142·5	0	0
11	626	4	16	2150·0	7·5	56·25
12	625	3	9	2135·0	— 7·5	56·25
13				2152·5	10	100
	$n=12$	$\Sigma dx = 1$	$\Sigma dx^2 = 113$	$n = 13$	$\Sigma dy = -10{\cdot}57$	$\Sigma dy^2 = 771{\cdot}18$

கோஹினூர் :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{n}$

$$622 + \frac{1}{12}$$

$$= 622{\cdot}1 \text{ (தோராயமாக)}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{113}{12}\left(\frac{1}{12}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9{\cdot}42}$$

$$= 3{\cdot}07 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாறுவிகிதக் கெழு $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{3{\cdot}01}{622{\cdot}1} \times 100$$

$$= 0{\cdot}493\%$$

டாடா டெஃபர் :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \frac{\Sigma dy}{n}$

$$= 2142{\cdot}5 + \frac{-10{\cdot}75}{13}$$

$$= 2141{\cdot}67$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dy}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{771.18}{13} - \left(\frac{-10.75}{13}\right)^2}$$

$$= \sqrt{58.63}$$

$$= \mathbf{7.66}$$

மாறு விகிதக் கெழு C.V. $\left.\right\} = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \times 100$

$$= \frac{7.66}{2141.67} \times 100$$

$$= \mathbf{0.358\%}$$

மேலே கணக்கிடப்பட்ட இரண்டு மாறுவிகிதக் கெழுக்களில் கோஹினூரின் 0·493%, டாடா டெஃபரின் மாறுவிகிதக் கெழு 0·358%ஐ விட அதிகமாக இருப்பதால், கோஹினூர் அதிக மாறு பாடு உடைய பங்கு என முடிவு செய்கிறோம்.

மாதிரி 198

27 இன்னிங்ஸ் ஆட்டங்களில் பிராட்மென், பான்ஸ்போர்டு ஆகிய இரு புகழ் பெற்ற கிரிக்கெட் ஆட்டக்காரர்களின் ஓட்ட எண்ணிக்கை வருமாறு :

பிராட்மென் :	304	244	206	160	149	140	132	
	94	80	62	53	48	45	42	36
	35	32	28	25	23	20	18	16
	14	10	6	3				
பான்ஸ்போர்டு :	281	266	229	181	125	93	83	
	72	64	58	52	48	46	41	36
	27	21	12	10	8	8	7	6	5
	3	0	0.					

இவ்விரு ஆட்டக்காரர்களில் மிகையான நிலைப்புத் தன்மை உடையவர் யார்?

(சென்னைப் பல்கலை)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கத்தையும் மாறுவிகிதக் கெழுவையும் காணல் :

பிராட்மென்			பான்ஸ்போர்டு		
ஓட்ட எண்ணிக்கை x	ஊகச் சராசரி ($B=100$) யிலிருந்து விலக்கம் dy	விலக்க வர்க்கம் dx^2	ஓட்ட எண்ணிக்கை y	ஊகச் சராசரி ($A=100$) யிலிருந்து விலக்கம் dy	விலக்க வர்க்கம் dx^2
304	204	41616	281	181	32761
244	144	20736	266	166	27556
206	106	11236	229	129	16641
160	60	3600	181	81	6561
149	49	2401	125	25	625
140	40	1600	93	—7	49
132	32	1024	83	—17	289
94	—6	36	72	—28	784
80	—20	400	64	—36	1296
62	—38	1444	58	—42	1764
53	—47	2209	52	—48	2304
48	—52	2704	48	—52	2704
45	—55	3025	46	—54	2916
42	—58	3364	41	—59	3481
36	—64	4096	36	—64	4096
35	—65	4225	27	—73	5329
32	—68	4624	21	—79	6241
28	—72	5184	12	—88	7744
25	—75	5625	10	—90	8100
23	—77	5929	8	—92	8464
20	—80	6400	8	—92	8464
18	—82	6724	7	—93	8649
16	—84	7056	6	—94	8836
14	—86	7396	5	—95	9025
10	—90	8100	3	—97	9409
6	—94	8836	0	—100	10000
3	—97	9409	0	—100	10000
2125		178999	1792		204088

பிராட்மென் :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{2125}{27}$

$= 78{\cdot}7$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - (\bar{x} - A)^2}$

$= \sqrt{\frac{178999}{27} - (78{\cdot}7 - 100)^2}$

$= \sqrt{6629{\cdot}59 - 453{\cdot}69}$

$= \mathbf{78{\cdot}5}$

மாறுவிகிதக் கெழு C. V. $= \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{76{\cdot}7}{78{\cdot}7} \times 100$

$= \mathbf{97{\cdot}0}$

பான்ஸ்போர்டு :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n}$

$= \frac{1792}{27}$

$= \mathbf{66{\cdot}37}$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{n} - (\bar{y} - B)^2}$

$= \sqrt{\frac{204088}{27} - (66{\cdot}37 - 100)^2}$

$= \sqrt{7595{\cdot}8 - 1130{\cdot}9769}$

$= \mathbf{80{\cdot}4}$

$$\text{மாறுவிகிதக் கெழு} = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \times 100$$

$$= \frac{80 \cdot 4}{66 \cdot 37} \times 100$$

$$= 121 \cdot 1$$

முடிவு :

மேற்கண்ட இரு மாறுபாடுகளையும் ஒப்பிட, பிராட்மெனின் மாறுவிகிதக் கெழுவே குறைவானது. ஆகவே, பான்ஸ்போர்டை விட பிராட்மென் அதிக நிலைப்புத் தன்மையுடையவர் என அறிகிறோம்.

மாதிரி 199

கீழ்க் காண்பவை, தினக் கணக்கில், 20 நாட்களுக்கு, *A*, *B* என்ற இரண்டு செங்கல் அடுக்குபவர்கள் அடுக்கிய செங்கற்களின் எண்ணிக்கையைத் தருகிறது.

A :	725	700	750	650	675	725	675
	725	625	675	700	625	725	675
	800	650	675	625	700	650	
B ;	575	625	600	575	675	625	575
	550	650	625	550	700	625	600
	625	650	575	675	625	600	

ஒவ்வொருவரின் மாறுவிகிதக் கெழுவையும் கணக்கிட்டு, யார் சீராகச் செங்கல் அடுக்குபவர் எனக் கண்டுபிடி.

A-ன் வரிசை உறுப்புகளில் ஒவ்வொன்றிலும் 10 செங்கற்களும், *B*-ன் வரிசை உறுப்புகளில், ஒவ்வொன்றிலும் 20 செங்கற்களும் அதிகமாகக் கொண்டால், முன்பு கணக்கிட்ட முடிவில் என்ன மாற்றம் ஏற்படும் ?

(பி.காம்.—1950)

தீர்வு :

A : மாறுவிகிதக் கெழு கணக்கிடல் :

செங்கல் அடுக்குபவர்—A			
செங்கற்கள் x	($A=700$) லிருந்து விலக்கம் dx	படி விலக்கம் $d'x\left(=\frac{dx}{25}\right)$	விலக்க வர்க்கம் $d'x^2$
725	25	1	1
700	0	0	0
750	50	2	4
650	— 50	— 2	4
675	— 25	— 1	1
725	25	1	1
675	— 25	— 1	1
725	25	1	1
625	— 75	— 3	9
675	— 25	— 1	1
700	0	0	0
675	— 25	— 1	1
725	25	1	1
675	— 25	— 1	1
800	100	4	16
650	— 50	— 2	4
675	— 25	— 1	1
625	— 75	— 3	9
700	0	0	0
650	— 50	— 2	4
$n=20$		— 8	60

செங்கல் அடுக்குபவர் A :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma d'x}{n} \times C$

$= 700 + \frac{-8}{20} \times 25$

$=$ 690 செங்கற்கள்.

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C\sqrt{\frac{\Sigma d'x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d'x}{n}\right)^2}$

$= 25\sqrt{\frac{60}{20} - \left(\frac{-8}{20}\right)^2}$

$= 25\sqrt{3{\cdot}00 - 0{\cdot}16}$

$=$ 42·1 செங்கற்கள்.

மாறுவிகிதக் கெழு $C.\ V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{42{\cdot}1}{690} \times 100$

$= 6{\cdot}1\%$

B :

மாறுவிகிதக் கெழு கணக்கிடல் :

செங்கல் அடுக்குபவர்—B			
செங்கற்கள் y	($B = 625$) லிருந்து விலக்கம் dy	படி விலக்கம் $d'y \left(= \frac{dy}{25}\right)$	விலக்க வர்க்கம் $d'y^2$
575	—50	—2	4
625	0	0	0
600	—25	—1	1

செங்கற்கள் y	$(B=625)$ -லிருந்து விலக்கம் dy	படிவிலக்கம் $dy' \left(= \frac{dy}{25}\right)$	விலக்க வர்க்கம் $d'y^2$
575	—50	—2	4
675	50	2	4
625	0	0	0
575	—50	—2	4
550	—75	—3	9
650	25	1	1
625	0	0	0
550	—75	—3	9
700	75	3	9
625	0	0	0
600	—25	—1	1
625	0	0	0
650	25	1	1
575	—50	—2	4
675	50	2	4
625	0	0	0
600	—25	—1	1
		—8	56

B செங்கல் அடுக்குபவர் :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \frac{\Sigma d'y}{n} \times C$

$$= 625 + \frac{-8}{20} \times 25$$

$$= 625 - 10$$

= 615 செங்கற்கள்

திட்ட விலக்கம் $\sigma_y = C\sqrt{\frac{\Sigma d'y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d'y}{n}\right)^2}$

$= 25\sqrt{\frac{56}{20} - \left(\frac{-8}{20}\right)}$

$= 25\sqrt{2.8 - 0.16}$

$= 40.625$ செங்கற்கள்

மாறுவிகிதக் கெழு $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{y}} \times 100$

$= \frac{40.625}{615} \times 100$

$= 6.6\%$

இங்கு $C.V.(A) = 6.1 < 6.6 = C.V.(B)$

ஆகவே செங்கல் அடுக்குபவர் A என்பவர் மிகவும் சீரானவர்.

A என்பவரின் வரிசை உறுப்புகள் 10 கூடுதலாயும் B என்பவரின் வரிசை உறுப்புகள் 20 கூடுதலாயும் இருப்பின் :

A-ன் கூட்டுச் சராசரி $= \bar{x} + 10$

$= 690 + 10$

$= 700$ செங்கற்கள்

B-ன் கூட்டுச் சராசரி $= \bar{y} + 20$

$= 615 + 20$

$= 635$ செங்கற்கள்

ஆனால், திட்ட விலக்கங்கள் σ_x, σ_y கள் மாறுவது இல்லை.

$\therefore \sigma_x = 42.1$

$\sigma_y = 40.625$

$$\text{தற்போது மாறுவிகிதக் கெழு } (A) = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{42 \cdot 1}{700} \times 100$$

$$= 6 \cdot 014\%$$

$$\text{தற்போது மாறுவிகிதக் கெழு } (B) = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \times 100$$

$$= \frac{40 \cdot 6}{635} \times 100$$

$$= 6 \cdot 394\%$$

சார்புச் சீரான தன்மை A, B இருவருக்கும் அப்படியே இருக்கிறது. ஆகவே, மறுபடியும் A-யே சீராக அடுக்குபவர் எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 200

கீழே தரப்பட்ட ஒரு கட்டுரையின் பகுதிக்கு, மாறுபட்ட எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை கொண்ட வார்த்தைகளின் பரவலை அமைக்கவும். ஒவ்வொரு வார்த்தையிலும் உள்ள எழுத்துகளை மாறியாக இங்குக் கணக்கிடவேண்டும். அப் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, மாறுவிகிதக் கெழு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

"Success in the examination confers no absolute right to appointment, unless Government is satisfied, after such enquiry as may be considered necessary, that the candidate is suitable in all respects for appointment to the public Service.

(ஐ.ஏ.எஸ்.—1947)

தீர்வு :

முதலில் அமைத்த அலைவெண் பரவல் கீழ்க்காணுமாறு அமைகிறது.

எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை	வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை	எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை	வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை
2	9	7	4
3	6	8	3
4	2	9	3
5	2	10	2
6	2	11	3

கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, மாறுவிகிதக் கெழு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடல் :

எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை x	வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை f	ஊகச் சராசரி ($A = 6$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	fdx	fdx^2	குவி அலைவெண் $c.f$
2	9	—4	—36	144	9
3	6	—3	—24	54	15
4	2	—2	—4	8	17
5	2	—1	—2	4	19
6	2	0	0	0	21
7	4	1	4	4	25
8	3	2	6	12	28
9	3	3	9	27	31
10	2	4	8	32	33
11	3	5	15	75	36
	$\Sigma f = 36$		$\Sigma fdx = -18$	$\Sigma fdx^2 = 360$	

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx}{\Sigma f}$

$= 6 + \frac{18}{36}$

$= 5 \cdot 5$ எழுத்துகள்.

இடை நிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{36+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 18 \cdot 5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$\therefore$ இடை நிலை $= 5$ எழுத்துகள்

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\left(\frac{\Sigma f dx^2}{n}\right) - \left(\frac{\Sigma f dx}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{360}{36} - \left(\frac{-18}{36}\right)^2}$

$= \sqrt{9 \cdot 75}$

$= 3 \cdot 12$ எழுத்துகள்

மாறுவிகிதக் கெழு $(C. V.) = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{3 \cdot 12}{5 \cdot 5} \times 100$

$= 56 \cdot 7\%$

மாதிரி 201

கீழ்க் காணும் பத்தியிலுள்ள வார்த்தைகளின் எழுத்துகளின் எண்ணிக்கையை x-மாறியாகக் கொண்டு ஓர் அலைவெண் பட்டியலைத் தயார் செய் :

" The reliability of data must always be examined before any attempt is made to base conclusion upon them. This is true

of all data, but particulary so of numerical data, which do not carry their quality written large on them. It is a waste of time to apply the refined theoretical methods of statistics to data which are suspect from the beginning."

(1) கூட்டுச் சராசரி (2) இடைநிலை (3) முகடு (4) மாறுபாடு ஆகியவற்றை அமைத்த பரவலுக்குக் காண்.

(ஐ. ஏ. எஸ்.—1967)

தீர்வு :

அலைவெண் பரவல் அமைத்தல் :

எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை x	குறிகள்	அலைவெண் f
1	|	1
2	卌 卌 卌 |	16
3	卌 |||	8
4	卌 卌 ||||	14
5	卌 ||	7
6	||	2
7	卌 |	6
8	|	1
9	||	2
10	|	1
11	|||	3
12	|	1

மேற்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, மாறுபாடு, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடல் ;

எழுத்துகளின் எண்ணிக்கை x	அலைவெண் f	ஊகச் சாரசரி ($A=4$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	fdx	fdx^2	குவி அலை எண் $c.f.$
1	1	—3	— 3	9	1
2	16	—2	—32	64	17
3	8	—1	— 8	8	25
4	14	0	0	0	39
5	7	1	7	7	46
6	2	2	4	8	48
7	6	3	18	54	54
8	1	4	4	16	55
9	2	5	10	50	57
10	1	6	6	36	58
11	3	7	27	147	61
12	1	8	8	64	62
	62		$\Sigma fdx = 35$	$\Sigma fdx^2 = 463$	

கூட்டுச் சாரசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$$= 4 + \frac{35}{62}$$

$$= 4\frac{35}{62} \text{ எழுத்துகள்}$$

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{62+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது 31·5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

∴ இடைநிலை = 4 எழுத்துகள்.

மாறுபாடு $\sigma^2 = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fdx}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{463}{62} - \left(\frac{35}{62}\right)^2}$$

$$= 7{\cdot}149063$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{7{\cdot}1490}$

$$= \mathbf{2{\cdot}673}.$$

பிரிவு படுத்தும் முறையில் முகட்டைக் கணக்கிடுகிறோம்.

உறுப்புகளின் அளவு	f_i	I	II	III	IV	V	கூடுதலான அலைவெண் கொண்டுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
1	1	17					1
2	16		**24**	**25**			3
3	8	**22**					5
4	14		21		**38**		3
5	7	9		23		**29**	1
6	2		8				0
7	6	7			15		0
8	1		3	9		9	0
9	2	3					0
10	1		4		4		0
11	3	4		5		6	0
12	1						0

ஆகவே 3ஐ முகடாகக் கொள்கிறோம்.

மாதிரி 202

பல்வேறு கால்பந்தாட்டப் போட்டிகளில் A, B என்ற இரு குழுவினர் பெற்ற வெற்றிப் புள்ளிகள் பற்றிய புள்ளி விவரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

வெற்றிப் புள்ளி களின் எண்ணிக்கை	ஆட்ட எண்கள்	
	A	B
0	27	17
1	9	9
2	8	6
3	5	5
4	4	3

ஒவ்வொரு குழுவிற்கும் மாறுவிகிதக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு எந்தக் குழு மிகையான நிலைப்புத் தன்மையுடையது எனக் காண்.

(ஐ.ஏ.எஸ்—1954)

தீர்வு :

இரண்டு குழுக்களின் வெற்றிப் புள்ளிகளுக்கும் மாறு விகிதக் கெழுக்களைக் கணக்கிடல் :

வெற்றிப் புள்ளிகள் (x)	ஊகச் சராசரி ($A=2$) யிலிருந்து விலக்கம் d	பிரிவு A			பிரிவு B		
		அலைவெண் f	fd	fd^2	அலைவெண் f'	$f'd$	$f'd^2$
0	—2	27	—54	108	17	—34	68
1	- 1	9	—9	9	9	—9	9
2	0	8	0	0	6	0	0
3	1	5	5	5	5	5	5
4	2	4	8	16	3	6	12
		53	—50	138	40	—32	94

பிரிவு A :

$$\text{கூட்டுச் சராசரி} \quad \bar{x}_1 = A + \frac{\Sigma fd}{n}$$

$$= 2 + \left(\frac{-50}{53}\right)$$
$$= 2 - 0{\cdot}9434$$
$$= \mathbf{1{\cdot}06} \text{ வெற்றிப் புள்ளிகள்}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{138}{53} - \left(\frac{-50}{53}\right)^2}$$
$$= \sqrt{2{\cdot}6 - 0{\cdot}81}$$
$$= \mathbf{1{\cdot}3} \text{ வெற்றிப்புள்ளிகள்}$$

மாறுவிகிதக் கெழு $(C.V.)_1 = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{1{\cdot}3}{1{\cdot}06} \times 100$$
$$= \mathbf{122{\cdot}6\%}$$

பிரிவு B :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2 = A + \left(\frac{\Sigma f'd}{n}\right)$

$$= 2 + \left(\frac{-32}{40}\right)$$
$$= 2 - 0{\cdot}8$$
$$= 1{\cdot}2 \text{ வெற்றிப் புள்ளிகள்}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma_2 = \sqrt{\frac{\Sigma f'd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f'd}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{94}{40} - \left(\frac{-32}{40}\right)^2}$$
$$= \sqrt{2{\cdot}35 - 0{\cdot}64}$$
$$= \sqrt{1{\cdot}71}$$
$$= 1{\cdot}3 \text{ வெற்றிப் புள்ளிகள்.}$$

$$\text{மாறுவிகிதக் கெழு } (C.\ V.)_2 = \frac{\sigma_2}{x_2} \times 100$$

$$= \frac{1{\cdot}3}{1{\cdot}2} \times 100$$

$$= 1{\cdot}083 \times 100$$

$$= 108{\cdot}3\%$$

பிரிவு *A*-ன் மாறுவிகிதக் கெழு 122·6, பிரிவு *B*-ன் மாறு விகிதக் கெழு 108·3 ஐ விட அதிகமாக இருக்கிறது. மாறுவிகிதக் கெழு குறைவாகவுள்ள குழுவினரே மிகையான நிலைப்புத்தன்மை தம்முடைய ஆட்டத்தில் உடையவர்கள் எனக் கணக்கிடப் படுகிறது. இதன்படி, இங்கு *B* குழுவே மிகுதியான நிலைப்புத் தன்மையுடையது எனக் கொள்கிறோம்.

மாதிரி 203

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு நகரங்களின் மக்கட் தொகை (ஆயிரத்தில்) அளவுகளுக்கு, இரு பரவல் அளவுகளைக் கணக்கிட்டு ஒப்பிடுக.

ஆண்டு	அலகாபாத் (ஆயிரத்தில்)	காசி (ஆயிரத்தில்)
1881	160	218
1891	175	223
1901	172	213
1911	172	204
1921	157	198
1931	184	205
1941	261	263

(எம். ஏ.—ஆக்ரா—1948)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம், மாறுவிகிதக் கெழு ஆகியவற்றை இரு நகரங்களுக்கும் கணக்கிடல் ;

ஆண்டு	அலகாபாத் மக்கட் தொகை (ஆயிரத்தில்) x	(183)-லிருந்து விலக்கம் dx	dx^2	காசி மக்கட் தொகை (ஆயிரத்தில்) y	(218)-லிருந்து விலக்கம் dy	dy^2
1881	160	−23	529	218	0	0
1891	175	− 8	64	223	5	25
1901	172	−11	121	213	− 5	25
1911	172	−11	121	204	−14	196
1921	157	−26	676	198	−20	400
1931	184	1	1	205	−13	169
1941	261	78	6084	263	45	2025
$n=7$	1281		7596	1524		2840

அலகாபாத்தின் மக்கட் தொகையின் கூட்டுச் சராசரி x = 183 ஆயிரங்கள்

காசியின் மக்கட் தொகையின் கூட்டுச் சராசரி y = 218 ஆயிரங்கள்

அலகாபாத் மக்கட் தொகையின் திட்ட விலக்கம் σ_x

$$= \sqrt{\frac{\Sigma\, dx^2}{n}} = \sqrt{\frac{7596}{7}} = 32{\cdot}9 \text{ ஆயிரங்கள்}$$

அலகாபாத் மக்கட் தொகையின் மாறு விகிதக் கெழு C. V.

$$= \frac{\sigma_x}{\overline{x}} = \frac{32{\cdot}9}{183} = {\cdot}18$$

காசியின் மக்கட் தொகையின் திட்ட விலக்கம் σ_y

$$= \sqrt{\frac{\Sigma\, dy^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2840}{7}}$$

$= \mathbf{20{\cdot}1}$ **ஆயிரங்கள்**

காசி மக்கட் தொகையின் மாறு விகிதக் கெழு C V. $= \frac{\sigma y}{\bar{y}}$

$$= \frac{20{\cdot}1}{218}$$

$$= 0{\cdot}09$$

காசியின் மாறுவிகிதக் கெழு (0·09)ஐ விட அலகாபாத்தின் மாறுவிகிதக் கெழு (0·18) அதிகமாய் இருப்பதால் அலகாபாத்தின் மக்கட் தொகையே காசியின் மக்கட் தொகையை விட அதிக மாறுபாடுடையது என அறிய முடிகிறது.

மாதிரி 204

ஒரு தனித்த வரிசையில் கூட்டுச் சராசரி M உடன் ஒப்பிடும்பொழுது, விலக்கங்கள் சிறியவையாக இருந்து, அதனுல் $\left(\frac{X}{M}\right)^3$-ம், $\left(\frac{X}{M}\right)$-ன் அதைவிட உயர்வான வர்க்கங்களும் நீக்கப் பட்டால் கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகள் தோராயமாகச் சரி யானவை எனக் காட்டு.

(1) $G = M\left(1 - \frac{\sigma_2}{2M^2}\right)$

(2) $M^2 - G^2 = \sigma^2$

(3) $H = M\left(1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right)$

(4) $MH = G^2$

(5) $M - 2G + H = 0.$

(இங்கு, M = கூட்டுச் சராசரி, G = பெருக்கல் சராசரி,
σ = திட்ட விலக்கம், H = ஹார்மனிக் சராசரி

(எம். எஸ்சி.—1953, 1963)

(பி. எஸ்ஸி.—ஆக்ரா—1955)

தீர்வு :

x ஒரு மாறி எனக் கொண்டால்,

$$x - m = X$$

$$x = X + M$$

$$= M\left(1 + \frac{X}{M}\right)$$

ஆதலின்

$$(1) \therefore \log G = \frac{1}{N}\Sigma f \log x$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f \log M\left(1 + \frac{X}{M}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f \log M + \frac{1}{N}\left[\Sigma f \log\left(1 + \frac{X}{M}\right)\right]$$

$$= \log M \frac{\Sigma f}{N} + \frac{1}{N}\Sigma f\left[\frac{X}{M} - \frac{X_2}{2M^2}\right]$$

($\frac{X}{M}$-ன் உயர் வர்க்கங்கள் நீக்கப் பட்டுள்ளன.)

$$\therefore \log G = \log M - \frac{1}{N}\Sigma f \frac{X^2}{2M^2}$$

$$\left(\text{இங்கு } \frac{1}{N}\Sigma fx = 0; \frac{1}{N}\Sigma f X^2 = \sigma^2\right)$$

$$\log G = -\frac{\sigma^2}{2M^2}$$

$$\therefore \frac{G}{M} = e^{\frac{-\sigma^2}{2M^2}}$$

$$G = Me^{\frac{-\sigma^2}{2M^2}}$$

$$= M\left(1 - \frac{\sigma^2}{2M^2}\right)$$

(இங்கு, $\frac{\sigma^2}{2M^2}$-ன் உயர் வர்க்கங்கள் நீக்கப்பட்டுள்ளன.)

$$G = M\left(1 - \frac{\sigma^2}{2M^2}\right)$$

(2) $$G^2 = M^2 e^{\frac{-\sigma^2}{M^2}}$$

$$= M^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right)$$

$$= M^2 - \sigma^2$$

$$G^2 - M^2 = -\sigma^2$$

$$\sigma^2 = M^2 - G^2$$

(3) $$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\Sigma f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{M}\Sigma f\left(1 + \frac{X}{M}\right)^{-1}$$

$(\because x = X + M)$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{M}\Sigma f\left(1 + \frac{X}{M}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{M}\frac{1}{N}\Sigma f\left(1 - \frac{X}{M} + \frac{X^2}{M^2}\right)$$

(இங்கு $\frac{X}{M}$ -ன் உயர் வர்க்கங்கள் நீக்கப்பட்டுள்ளன.)

$$= \frac{1}{M}\left\{\frac{\Sigma f}{N} - \frac{\Sigma fX}{N \cdot M} + \frac{\Sigma fX^2}{NM^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{M}\left\{1 - 0 + \frac{\sigma^2}{M^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{M}\left(1 + \frac{\sigma^2}{M^2}\right)$$

$$\therefore\ H = M\left(1 + \frac{\sigma^2}{M^2}\right)^{-1}$$

$$= M\left(1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right)$$

($\frac{\sigma^2}{M^2}$ -ன் உயர் வர்க்கங்கள் நீக்கப்பட்டுள்ளன.)

$$\therefore \ H = M\left(1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right)$$

(4) $$MH = M^2\left(1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right)$$

$$= M^2 - \sigma^2$$

$$= G^2$$ (2-ல் இருந்து)

$$\therefore MH = G^2$$

(5) $$M - 2G + H = M - 2M\left(1 - \frac{\sigma^2}{2M^2}\right) + M\left(1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right)$$

$$= 0$$

$$\therefore M - 2G + H = 0$$

மாதிரி 205

x என்ற மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே M, σ என்பனவாகும். கூட்டுச் சராசரியின் மதிப்புடன் ஒப்பிடும்பொழுது விலக்கங்கள் சிறியனவாக இருந்தால், கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டைச் சரி எனக் காண்.

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } (\sqrt{x}) = \sqrt{M}\left(1 - \frac{\sigma^2}{8M^2}\right)$$

தீர்வு :

x ஐ மாறியாகக் கொண்டால்,

$$x - M = X$$

ஆகவே $$x = M + X$$

$$= M\left(1 + \frac{X}{M}\right)$$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \sqrt{2} = \frac{1}{N}\Sigma f\ (\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f \sqrt{M}\left(1 + \frac{X}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{M}\ \frac{1}{N}\ \Sigma f\left(1 + \frac{X}{2M} - \frac{X^2}{8M^2}\right)$$

(இங்கு $\frac{X}{M}$-ன் உயர் வர்க்கங்கள் நீக்கப்பட்டுள்ளன.)

$$= \sqrt{M}\left(\frac{\Sigma f}{N} + \frac{\Sigma fx}{N2M} - \frac{\Sigma fX^2}{N\,8M^2}\right)$$

$$= \sqrt{M}\left(1 + 0 - \frac{\sigma^2}{8M^2}\right)$$

$$\therefore\ (\sqrt{x})\text{-ன் கூட்டுச் சராசரி} = \sqrt{M}\left(1 - \frac{\sigma^2}{8M^2}\right)$$

மாதிரி 206

எல்லாத் தனித்த பரவல்களிலும் திட்ட விலக்கம், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கத்தை விடக் கூடிய மதிப்புடையது எனக் காண்.

தீர்வு :

$$\sigma^2 = \delta\bar{x}^2$$

என இங்குக் காட்டவேண்டும்.

$$\text{அதாவது,}\ \frac{1}{N}\Sigma f\left(x - \bar{x}\right)^2 = \left\{\frac{1}{N}\Sigma f\,|x - \bar{x}|\right\}^2$$

எனக் காட்டவேண்டும்.

$y = (x - \bar{x})$ என்று இருக்கட்டும்.

$$\text{பின்பு,}\ \frac{1}{N}\Sigma fy^2 \geqslant \left\{\frac{1}{N}\Sigma f\,|y|\right\}^2$$

$$\text{அல்லது,}\ N\Sigma fy^2 \geqslant \{\Sigma f\,|y|\}^2$$

$$\text{அல்லது,}\ (f_1+f_2+f_3+\dots\dots+f_n)\ (f_1y_1^2+f_2y_2^2+\dots\dots+f_n y_n^2) \geqslant (f_1|y_1|+f_2|y_2|+\dots\dots+f_n|y_n|)^2$$

$$\text{அல்லது,}\ f_1f_2(y_1^2+y_2^2) + \dots\dots \geqslant 2f_1f_2|y_1y_2| + \dots\dots$$

$$\text{அல்லது,}\ f_1f_2(|y_1| - |y_2|)^2 + \dots\dots \geqslant 0$$

$f_1 f_2 f_3 \ldots\ldots$ கள் எல்லாம் நேரிடை $(+ve)$ எண்களாக இருப்பதால், மேற்கண்ட சமன்பாட்டின்மை சரியானதே. ஆகவே, திட்ட விலக்கம் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப் பட்ட சராசரி விலக்கத்தைவிடக் கூடிய மதிப்புடையதே எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 207

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\ldots, a+2nd$ என்ற கூட்டுத்தொடர் உறுப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து காணும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தினையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் காண்க. பின்னது முன்னதை விடப் பெரியது என்பதை நிறுவுக.

(சென்னைப் பல்கலை)

தீர்வு :

கொடுத்துள்ள வரிசை $= a, \; a+d, a+2d, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; a+2nd$ என்பதாகும்.

இதன் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+(a+2nd)}{(2n+1)}$$

$$= a+nd$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து காணும் விலக்கம்

$$= \frac{[\,nd+(n-1)\,d+\ldots\ldots+d\,]\times 2}{(2\,n+1)}$$

$$= \frac{n\,(\,n+1\,)}{2\,n+1}\times d$$

திட்ட விலக்கம் காணல் :

ஊகச் சராசரி a எனக் கொள்வோம்.

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2$$

$$= \frac{d^2+2^2d^2+\ldots\ldots\ldots+(2n)^2d^2}{(2n+1)}$$

$$= \left(\frac{d+2d+\ldots\ldots\ldots+2nd}{2n+1}\right)^2$$

$$= \frac{d^2\,(\,n+1\,)n}{3}$$

$$\therefore \sigma = d\sqrt{\frac{n(n+1)}{3}}$$

$\sigma \geqslant \delta\bar{x}$ எனக் காட்டல் :

$$d\sqrt{\frac{n(n+1)}{3}} \leqslant d \times \frac{n(n+1)}{(2n+1)}$$

அல்லது, $$\frac{n(n+1)}{3} \geqslant \left[\frac{n(n+1)}{(2n+1)}\right]^2$$

அல்லது $$\frac{1}{3} \geqslant \frac{[n(n+1)]}{(2n+1)^2}$$

அல்லது $$\frac{(2n+1)^2}{3(n^2+n)} \geqslant 1$$

இங்கு n என்ற எண் நேரிடை அல்லது எதிரிடை அல்லது பூச்சியமாக இருப்பினும் .($n = +ve, or -ve, or\ 0$), மேற்கண்ட சமன்பாட்டின்மை சரியானது எனக் காண்கிறோம்.

ஆகவே, இங்கு, திட்ட விலக்கம் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கண்ட சராசரி விலக்க மதிப்பை விடக் கூடியதே என்பது நிரூபிக்கப்பட்டு விட்டது.

மாதிரி 208

முதல் n கண்டறிந்த உறுப்புகளிலிருந்து கூட்டுச் சராசரியும் மாறுபாடும் கணக்கிடப்பட்டது. பின்பு சரி பார்த்தபொழுது x_1 என்று கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பெண் பிழையானது என்றும், அதற்குப் பதில் x_1' என்ற மதிப்பே சரியானது என்றும் கண்டறியப்பட்டது. முதலில் கணக்கிடப்பட்ட உறுப்புகளின் கூட்டல் T என்று கொண்டு, இப் பிழையினை மாறுபாட்டிலிருந்து சரி செய்யவேண்டிய மதிப்பு,

$$\frac{1}{n}(n_1'-x_1)\left(x_1'+x_1-\frac{x_1'-x_1+2T}{n}\right)$$

எனக் காண்.

(எம். எஸ்சி.—1968)

தீர்வு :

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்பன கண்டறிந்த உறுப்புகளாகும்.

பின்பு $T = x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n$

ஆதலால் $T-x_1 = x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n$

$\therefore \quad T-x_1+x_1' = x_1'+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n$

முதலில் கணக்கிடப்பட்ட கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n}{n}$$

$$= \frac{T}{n}$$

$\therefore$ புதிய கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{T-x_1+x_1'}{n}$

முதலில் கணக்கிடப் பட்ட மாறுபாடு $\Big\}$ $= \dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots\ldots+x_n^2}{n} - \left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n}\right)^2$

$$= \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots\ldots+x_n^2}{n} \times \left(\frac{T}{n}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \; I$$

புதிய மாறுபாடு $= \dfrac{x_1'^2+x_2^2+\ldots\ldots\ldots+x_n^2}{n} - \left[\dfrac{T-x_1+x_1'}{n}\right]^2 \quad \ldots\ldots \; II$

ஆதலால், சரிக் கட்ட வேண் டிய மதிப்பு $\Big\}$ = புதிய மாறுபாடு — முதலில் கணக்கிடப் பட்ட மாறுபாடு

$$= \frac{x_1'^2-x_1^2}{n} + \left[\frac{T}{n}\right]^2 - \left[\frac{T-x_1+x_1'}{n}\right]^2$$

$$= \frac{(x_1'-x_1)(x_1'+x_1)}{n} + \left(\frac{T}{n} - \frac{T-x_1+x_1'}{n}\right) \times \left(\frac{T}{n} + \frac{T-x_1+x_1'}{n}\right)$$

$$= \frac{(x_1'-x_1)(x_1'+x_1)}{n} + \frac{(x_1-x_1')}{n} \times \left(\frac{2T+x_1'-x_1}{n}\right)$$

$$= \frac{(x_1'-x_1)}{n}\left[x_1'+x_1 - \frac{x_1'-x_1+2T}{n}\right]$$

மாதிரி 209

$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ என்ற கூட்டுச் சராசரிகளிலிருந்து முறையே கணக்கிடப் பட்டு, n_1, n_2 என்ற எண்களை முறையே உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையாகக் கொண்ட இரு குழுக்களின் திட்ட விலக்கங்கள் σ_1, σ_2 என்பனவாகும். இரு குழுக்களும் ஒன்ருகி (n_1+n_2) உறுப்புகள் உடைய ஒரு குழுவாளுல் அதன் திட்ட விலக்கம் (அதனுடைய கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்டபொழுது)

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2+n_2\sigma_2^2}{n_1+n_2} + \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2$$

ஆக இருக்கும் என்று காட்டு.

(பி.ஏ.— சென்னை 1953)

தீர்வு :

s_1^2, s_2^2 என்பன முறையே, இரு குழுக்களின் வர்க்க விலக்கங் களின் கூட்டுச் சராசரியாகும்.

S^2 என்பது ஒன்ருன இரு குழுக்களின் வர்க்க விலக்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியாகும்.

A என்பது ஊகச் சராசரியாளுல்

$$S^2 = \frac{1}{n_1+n_2}\sum_{1}^{n_1+n_2} f\,(x-A)^2$$

$$= \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{1}^{n_1} f\,(x-A)^2 + \sum_{n_1+1}^{n_1+n_2} f\,(x-A)^2\right)$$

$$= \frac{n_1s_1^2 + n_2s_2^2}{n_1+n_2}$$

$$= \frac{n_1(\sigma_1^2+d_1^2)+n_2(\sigma_2^2+d_2^2)}{n_1+n_2}$$

$$(\because\ S_2 = \sigma^2+d^2)$$

$$= \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 + n_2} \quad \ldots\ldots \quad I$$

இங்கு $d_1 = (\bar{x}_1 - A)$; $d_2 = (\bar{x}_2 - A)$

A என்பது இரு குழுக்கள் ஒன்றுகிய பின் அக்குழுவின் கூட்டுச் சராசரியாளுல்,

$$A = \bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$S^2 = \sigma^2$$

$$d_1 = x_1 - A$$

$$= \bar{x}_1 - \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{n_2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{n_1 + n_2}$$

இதேபோல் $d_2 = \dfrac{n_1(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{n_1 + n_2}$

இந்த மதிப்புக்களை I-ல் போட்டால், கீழ்க் காண்பவற்றை அடைகிறேம்.

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$$

மாதிரி 210

200 மாணவர்கள் வரலாற்றுப் பாடத்தில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் அலைவெண் பரவலில் (0—5, 5—10, ...etc. என்ற பிரிவுகளைக் கொண்டு) கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் முறையே 40, 15 என்று கணக்கிடப்பட்டது. பின்பு, சரிபார்த்த பொழுது உண்மை மதிப்பெண் 43-க்குப் பதிலாக 53 என்று தவறுதலாக எடுத்துக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட தவறு கண்டு பிடிக்கப்பட்டது. ஆகவே சரி செய்யப்பட்ட புதிய அலைவுப் பரவலுக்கு, சரியான கூட்டுச் சராசரி, திட்டவிலக்கம் ஆகியவைகளை முறையே கண்டுபிடி.

(ஐ. ஏ. எஸ்.—1957)

தீர்வு :

சரி செய்யப்படாத பரவலில் கூட்டுச் சராசரி = 40

மாணவர்கள் எண்ணிக்கை = 200

திட்ட விலக்கம் = 15

$$40 = \frac{1}{200} \Sigma f_i x_i$$

$$\therefore \Sigma f_i x_i = 8000$$

சரி செய்யப்படாத அலைவெண் பரவலில் தவறுதலான மதிப்பெண் 53, 50—55 என்ற பிரிவில் விழும். அதனுடைய மத்திய மதிப்பு 52·5 ஆகும். ஆனல் சரியான மதிப்பெண் 43-ன் பிரிவின் மத்திய மதிப்பு 42·5.

ஆதலால் $\Sigma f_i x_i$ (சரி செய்யப்பட்டது) $= 8000 - 52{\cdot}5 + 42{\cdot}5$
$= 7790$

$\therefore$ கூட்டுச் சராசரி (சரி செய்யப்பட்டது) $= \dfrac{7790}{200}$

$= \mathbf{39{\cdot}95}$ மதிப்பெண்

இதே போல்

$\Sigma f_i x_i^2$ (சரி செய்யப்படாதது) $= \Sigma f_i x_i^2$ (சரி செய்யப்பட்டது)
$= (52{\cdot}5)^2 - (42{\cdot}5)^2$

தற்பொழுது, $\Sigma f_i x_i^2$
(சரி செய்யப்படாதது) $= N(\sigma^2 + \bar{x}^2)$
$= 200\,[\,(15)^2 + (40)^2\,]$
$= 365000$

$\therefore \Sigma f_i x_i^2$
(சரி செய்யப்பட்டது) $= \Sigma f_i x_i^2$ (சரி செய்யப்படாதது)
$- (52{\cdot}5)^2 + (42{\cdot}5)^2$

$= 365000 - (95 \times 10)$
$= 364050$

ஆதலால் σ^2

$$\text{(சரி செய்யப்பட்டது)} = \frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2 \text{ (சரி செய்யப்பட்டது)}$$

$$- \bar{x}^2 \text{ (சரி செய்யப்பட்டது)}$$

$$= \frac{364050}{200} - (39{\cdot}95)^2$$

$$\sigma = 14{\cdot}974 \text{ மதிப்பெண்கள்.}$$

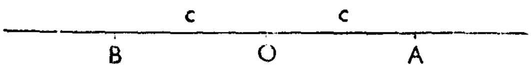
ஆகவே சரி செய்யப்பட்ட கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே 39·95; 14·974 ஆகும்.

மாதிரி 211 *(a)*

இடை நிலையிலிருந்து கண்ட சராசரி விலக்கம், மற்ற வேறு எந்த அளவிலிருந்தும் கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களை விடக் குறைவான மதிப்புடையது எனக் காட்டு.

(ஐ.ஏ எஸ்.—1947)

முதல் முறைத் தீர்வு :



படம் 1

மேற்கண்ட படத்தில் O என்பது இடைநிலையாகும். A என்பது O-லிருந்து c என்ற இடைவெளி கொண்டு O-ன் வலப் பக்கமாக உள்ள புள்ளியாகும்.

D_O, D_A என்பன முறையே O, A என்பவற்றிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட தனி விலக்கங்களின் கூடுதல்களாகும்.

D_{OR} D_{OL} என்பன முறையே O-ன் வல, இடப் பக்கங்களிலுள்ள கண்டறிந்த விவரங்களின் தனி விலக்கக் கூடுதல்களாகும். இவை இரண்டையும் கூட்டினால் D_O கிடைக்கிறது.

இதேபோல் D_{AL}, D_{AR} என்பன முறையே A-ன் இட, வலப் பக்கங்களிலுள்ள கண்டறிந்த விவரங்களின் தனி விலக்கக் கூடுதல்களாகும். இவை இரண்டின் கூடுதல் D_A ஐத் தருகிறது.

எனவே,

$$D_A - D_O = (D_{AL} + D_{AR}) - (D_{OL} + D_{OR})$$

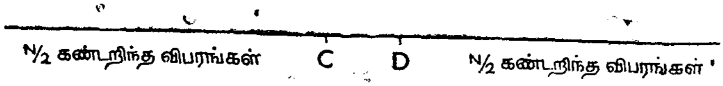
$$= (D_{AL} - D_{OL}) + (D_{AR} + D_{OR})$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் வலப்புறமுள்ள முதல் பகுப்பு நேரிடை மதிப்பாகிய $\left(\frac{N}{2}\right)c$ ஆகும். இரண்டாவது பகுப்பு நேரிடை அல்லது எதிரிடை மதிப்பாக இருக்கலாம். ஆனால் $\left(\frac{N}{2}\right)c$ என்ற மதிப்பை விட அளவில் கூடுதலாக இராது. ஏனெனில் இங்கு O-ன் வலப்புறமுள்ள $\frac{N}{2}$ மதிப்புகளுக்கு A-லிருந்து விலக்கம் கணக்கிடும்பொழுது, அவை நேரிடையாகவோ அல்லது எதிரிடையாகவோ இருக்கின்றன என்பதாகும்.

ஆகவே,

$$D_A \geqslant D_O\ ;\quad D_B \geqslant D_O$$

கீழ்க்காணும் இரண்டாவது படத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்:



படம் 2

மேலும் மேற்கண்ட படத்தில் CDஐ இடைநிலையாகக் கொண்டு, CD என்ற எல்லையில் விழும் ஏதாவது ஒரு புள்ளி இடைநிலையைக் குறிக்கட்டும். எனவே CD என்ற எல்லையினுள் உள்ள எந்தப் புள்ளியினின்றும் கணக்கிடப்படும் விலக்கக் கூடுதல், மற்ற எந்தப் புள்ளியினின்றும் கணக்கிடப்படும் விலக்கக் கூடுதலை விடக் குறைவாக இருக்கும்.

ஆகவே, இங்கு இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கம் மற்ற எந்தச் சராசரியிலிருந்தும் கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கத்தை விடக் குறைவாக இருக்கும் எனக் கணக்கிட்டு அறிகிறோம்.

இரண்டாம் முறைத் தீர்வு :

ஏதோ ஒரு புள்ளி a-லிருந்து கணக்கிடப்பட்ட சராசரி விலக்கம் :

$$\delta(a) = \int_{-\infty}^{a} |x-a|\ dF(x)$$

இங்கு $F(x)$ என்பது பரவல் சார்பாகும்.

$$= \int_{-\infty}^{a} (a-x)\, dF + \int_{a}^{\infty} (x-a)\, dF$$

ஆகவே,

$\delta(a+h)-\delta(a)$

$$= \int_{-\infty}^{a+h} (a+h-x)\, dF - \int_{-\infty}^{a} (a-x)\, dF$$

$$+ \int_{a+h}^{\infty} (x-a-h)\, dF - \int_{a}^{\infty} (x-a)\, dF$$

ஆகவே,

$$\frac{\delta(a+h)-\delta(a)}{h} = \int_{-\infty}^{a} dF = \int_{a}^{\infty} dF + 2\int_{a}^{a+h} \frac{a+h-x}{h}\, dF$$

$(a,\ a+h)$ என்ற இடைவெளியில் $\frac{a+h-x}{h}$ என்பதன் கீழ், மேல் எல்லைகள் முறையே 0, 1 என்பனவாகும்.

ஆகவே,

$$\int_{a}^{a+h} \frac{a+h-x}{h}\, dF = \lambda\, [F(a+h)-F(a)],$$

இங்கு $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ஆகும்.

ஆகவே,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\delta(a+h)-\delta(a)}{h} = A\,(a) + 2\lambda\, [F(a+h)-F(a)]$$

இங்கு,

$$A\,(a) = \int_{-\infty}^{a} dF - \int_{a}^{\infty} dF$$

a-ல் $F(x)$ ஒரு சால்டஸ் (Saltus) கொண்டிராவிட்டால்,

$$\lim_{h\to 0}\left[F(a+h)-F(a)\right] = 0$$

ஆகவே,

$\lim_{h\to 0} \frac{\delta(a+h)-\delta(a)}{h}$ என்பது $A(a)$-க்குச் சம மாகும். ஆகவே $\delta'(a) = A(a)$

மேலும் $\delta(a)$ என்பது மிகப் பெரியது, மிகச் சிறியது ஆக இருக்க $\delta'(a) = 0$ என்று இருக்கவேண்டும்.

ஆகவே,

$$\int_{-\infty}^{a} dF - \int_{a}^{\infty} dF = A(a) = \delta'(a) = 0$$

ஆகவே இடைநிலை a-ல் இருக்கிறது.

$\delta(a)$ மிகச் சிறியது ; ஆனால் மிகப் பெரியது அல்ல எனக் காட்டல் :

இங்கு $\int_{-\infty}^{a} df$ என்பது $-\infty$-லிருந்து a வரை அலைவு கொண்டு a ஐக் கொண்டு கூடுகிறது. அதேபோல், $\int_{a}^{\infty} dF$ என்பது a ஐக் கொண்டு குறைகிறது.

ஆகவே, $\delta'(a)$ என்பது a ஐக் கொண்டு கூடுகிறது. இது, $\delta(a)$ என்பது மிகச் சிறியது எனக் காட்டுகிறது. இங்ஙனம் தீர்வு காண்கிறோம்.

மாதிரி 211 (b)

கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் வரிசை, சம இடைவெளி கொண்ட கூட்டுத் தொடர் (Arithmatic Progression) என்று இருந்தால், அதற்கு இடைநிலையிலிருந்து கண்ட சராசரி விலக்கம், மற்ற வேறு

எந்த அளவிலிருந்தும் கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களை விடக் குறைவான மதிப்புடையது எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

சோதனை 1 :

எடுத்துக் கொண்ட எண்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருக்கும் பொழுது :

உதாரணமாக,

4, 7, 10, 13, 16 என்ற கூட்டுத் தொடர் சம விலக்கம் 3 ஐக் கொண்டும், மொத்த எண்களின் எண்ணிக்கை 5 என்று ஒற்றைப் படை எண்ணாகவும் இருக்கிறது. (இங்கு எடுத்துக் கொண்ட எண்களின் மதிப்பு ஒற்றைப் படையாகவோ, இரட்டைப் படையாகவோ இருக்கலாம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.)

பொதுவாக,

எடுத்துக் கொண்ட எண்களின் எண்ணிக்கைக் கூடுதல் $(2n+1)$ என்று இருக்க, அவ் வெண்களை ஏறு வரிசை மதிப்பில் கீழ்க் கூறும் வரிசையில் எழுதலாம்.

$$(x_0-nh)\ (x_0-\overline{n-1}h)\ \ldots\ldots,\ x_0,\ \ldots\ldots\ (x_0+\overline{n-1}h)\ (x_0+nh).$$

x_0 என்பது மதிப்பில், மத்திய மதிப்பாகும்.

எனவே, இது இடைநிலை எனத் தெரிகிறது.

S_m என்பது x_m-லிருந்து விலகியுள்ள சார்பற்ற எண்களின் கூடுதல்களாகும்.

அதாவது,

$$S_m = \Sigma\ |x_m-x_r|$$

இங்கு,

x_r என்ற மதிப்பு $x_o-nh, \ldots\ldots, x_o+nh$ என்ற எல்லா மதிப்புகளையும் பெறுகிறது.

$$S_0 = \Sigma\ |x_0-x_r|$$
$$= 2\ (h+2h+\ldots+nh)$$
$$S_1 = 2\ (h+2h+\ldots+\overline{n-1}h)+nh+(n+1)h$$
$$S_1-S_0 = h$$

அதேபோல் $S_2 - S_1 = 3h$

ஆக, $S_0 < S_1 < S_2 \ldots\ldots$

அதே போல், $S_0 < S_{-1} < S_{-2} \ldots\ldots$

எனக் காட்டலாம்.

இங்கு m-ன் மதிப்பு கூடும்பொழுது, S_m, S_{-m}-களின் மதிப்பும் கூடுகிறது என அறிகிறோம். எனவே S_o குறை மதிப்புடையது என்பது தெளிவாகிறது.

சோதனை 2 :

எடுத்துக் கொண்ட கூட்டுத் தொடர் எண்களின் எண்ணிக்கைக் கூடுதல் இரட்டைப் படை எண்ணுக இருக்கும் பொழுது:

உதாரணமாக,

2, 7, 12, 17, 22, 27 என்ற கூட்டுத் தொடர் சம விலக்கம் 5ஐக் கொண்டும், மொத்த எண்களின் எண்ணிக்கை 6 என்று, இரட்டைப் படை எண்ணுகவும் இருக்கிறது.

(இங்கு, முன்போல் எடுத்துக் கொண்ட எண்களின் மதிப்பு ஒற்றைப் படையாகவோ இரட்டைப் படையாகவோ இருப்பதைக் கவனிக்கவும்)

பொதுவாக,

கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் எண்ணிக்கைக் கூடுதல் $2n$ ஆக இருக்கட்டும். அவ்வெண்களை ஏறுவரிசை மதிப்பில் எழுதினுல் கீழ்க் கண்டுள்ளபடி அடைகிறோம் எனக் கொள்வோம்.

$$[x_0 - \tfrac{1}{2}(2n-1)h], \ldots, [x_0 - \tfrac{1}{2}h], [x_0 + \tfrac{1}{2}h], \ldots [x_0 + \tfrac{1}{2}(2n-1)h]$$

எனவே,

இங்கும் x_o என்பது இடைநிலை எனத் தெளிவாக அறியலாம்.

முன்போலவே கீழ்க் காண்பவற்றை அடைகிறோம்.

$$S_0 = 2[\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}\cdot 3h + \tfrac{1}{2} \ldots + (2n-1)h]$$

$$S_1 = 2[\tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}\cdot 3h + \ldots + \tfrac{1}{2}(2n-3)h] + \tfrac{1}{2}(2n-1)h + \tfrac{1}{2}(2n+1)h$$

இங்கும் முன்போல் S_0 என்பது குறைவான மதிப்புடையது எனக் காட்டலாம்.

ஆகவே, தேவையான தீர்வை அடைகிறோம்.

மாதிரி 212

இரண்டு பிரிவு மாணவர்களின் அறிவு வளர்ச்சி வயதின் (மாதங்களில்) கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் கீழே தரப் பட்டுள்ளன.

	கூட்டுச் சராசரி	திட்ட விலக்கம்
பிரிவு *A*	104	14
பிரிவு *B*	193	17

எப் பிரிவு அதிக ஒருபடித்தானது (Homogeneous) ?

(பி.ஏ.-சென்னை-1972)

தீர்வு :

பிரிவு *A* :

$$\text{மாறுவிகிதக் கெழு } C.V. = \frac{\sigma}{x} \times 100$$

$$= \frac{14}{104} \times 100$$

$$= 13{\cdot}46$$

பிரிவு *B* :

$$\text{மாறுவிகிதக் கெழு } C.V. = \frac{\sigma}{x} \times 100$$

$$= \frac{17}{193} \times 100$$

$$= 8{\cdot}808$$

இரண்டு பிரிவுகளின் மாறுவிகிதக் கெழுக்களையும் ஒப்பிட்டு நோக்கின், இரண்டாம் பிரிவின் மாறுவிகிதக் கெழு குறைவாக உள்ளது. ஆகவே, இரண்டாம் பிரிவே அதிக ஒருபடித்தான பிரிவாகும்.

மாதிரி 213

$$n_1 = 36 \qquad \Sigma x_1^2 = 49428$$
$$n_2 = 46 \qquad \Sigma x_2^2 = 71258$$

என்பன முறையே இரு மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகைகளாகும். இரண்டு மாதிரிகளின் தனித்தனி திட்ட விலக்கங்களைக் காண்.

மேற்கண்ட இரண்டு மாதிரிகளின் தனித்தனி மாறுவிகிதக் கெழுக்களைக் கணக்கிட இன்னும் என்ன மதிப்புகள் தேவைப்படுகின்றன?

(பி.காம். —1943)

தீர்வு :

முதல் மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\dfrac{\Sigma x_1^2}{n_1}}$

$= \sqrt{\dfrac{49428}{36}}$

$= \dfrac{222{\cdot}06}{6}$

$=$ **37·01**

இரண்டாவது மாதிரியின் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\dfrac{\Sigma x_2^2}{n_2}}$

$= \sqrt{\dfrac{71258}{49}}$

$= \dfrac{266{\cdot}56}{7}$

$=$ **38·08**

மாறுவிகிதக் கெழு C.V. $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

$= \dfrac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} \times 100$

மேற்கண்ட இரு மாதிரிகளிலும் கூட்டுச் சராசரி கொடுக்கப்படவில்லை. ஆகவே மாறுவிகிதக் கெழு காணும் சூத்திரத்தில்

போட, கூட்டுச் சராசரிகள் தனித்தனியே இரண்டு மாதிரிகளுக்கும் தேவைப்படுகிறது.

மாதிரி 214

கீழ்க் காண்பவற்றுள் எந்தப் பிரிவு சீரான தன்மையுடையது ?

(1) $\sigma_1 = 14 \qquad \bar{x}_1 = 20$

(2) $\sigma_2 = 12 \qquad \bar{x}_2 = 18$

(பி.காம்.—சென்னை 1968)

தீர்வு :

(1) மாறுவிகிதக் கெழு C. V. $= \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

$= \frac{14}{20} \times 100$

$= 70\%$

(1) மாறுவிகிதக் கெழு C. V. $= \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

$= \frac{12}{18} \times 100$

$= 66{\cdot}66\%$ (தோராயமாக)

மேற்காணும் மாறுவிகிதக் கெழுக்களில் இரண்டாவது கணக்கின் கெழு ($66{\cdot}66\% < 70\%$) குறைவானது. ஆகவே இரண்டாவது பிரிவு மிகவும் சீரானது.

மாதிரி 215

ஒரு தொழிற்சாலையில் வாரச் சம்பளக் கூட்டுச் சராசரி ரூ. 8-லிருந்து ரூ. 12 ஆகவும், திட்ட விலக்கம் ரூ. 1-லிருந்து ரூ. 1·50 ஆகவும் உயர்ந்துள்ளது. சம்பளம் தற்பொழுது மிகவும் சீரடைந்துள்ளதா எனக் காண்.

(பி.காம்.—1963)

தீர்வு :

இந்தக் கணக்கில் நாம் மாறுவிகிதக் கெழுக்களைக் கணக்கிட்டு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவேண்டும்.

சம்பளம் உயர்வதற்கு முன்னுல் மாறுவிகிதக் கெழு :

$$C.V. = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

$$= \frac{1}{8} \times 100$$

$$= 12{\cdot}5\%$$

சம்பளம் உயர்ந்த பின்பு மாறு விகிதக் கெழு :

$$C.V. = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$$

$$= \frac{1{\cdot}5}{12} \times 100$$

$$= 12{\cdot}5\%$$

இரண்டு மாறுவிகிதக் கெழுக்களும் ஒன்றே. ஆகவே, சீரான தன்மையில் மாற்றமில்லை.

மாதிரி 216

(a) கொடுக்கப்பட்டவை : $n = 35$; $\Sigma x^2 = 2850$; $x = X - \bar{x}$.
திட்ட விலக்கத்தைக்காண்.

(b) கொடுக்கப்பட்டவை : $\sigma = 22$; $\Sigma fd^2 = 7744$.
உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்.

தீர்வு :

(a) திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$

$$= \sqrt{\frac{2850}{35}}$$

$$= \sqrt{81{\cdot}43}$$

$= 9{\cdot}02$ (தோராயமாக)

(b) திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}}$ $[\because d = (x-\bar{x})]$

ஆகவே, $22 = \sqrt{\frac{7744}{n}}$

$$\text{அல்லது } (22)^2 = \frac{7744}{n}$$

$$\text{அல்லது } n = \frac{7744}{(22)^2}$$

$$\text{அல்லது } n = \frac{7744}{484}$$

$$\therefore n = 16$$

மாதிரி 217

இரு நிறுவனங்கள் *I*, *II* என்பன தம்முடைய வேலையாட்களுக்குக் கொடுத்த மாதச் சம்பளங்களின் பகுப்பாய்வு கீழே தரப் பட்டுள்ளது :

	நிறுவனம் *I*	நிறுவனம் *II*
சம்பளம் வாங்குபவர் எண்ணிக்கை	596	654
மாதச்சம்பளத்தின் கூட்டுச் சராசரி	ரூ. 54·65	ரூ. 48·54
சம்பளப் பரவலின் மாறுபாடு	ரூ. 81·64	ரூ. 100 42

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு,

(1) மாதச் சம்பளக் கூட்டுச் சராசரி, (2) வேலையாட்களின் சம்பளத் திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றை இரண்டு நிறுவனங்களையும் ஒன்றாக்கிக் கணக்கிடுக.

(பி. எஸ்சி. - சென்னை — 1968)

மேற்கண்ட விவரப்படி $N_1 = 596$ $N_2 = 654$

$\bar{x}_1 = 54{\cdot}65$ $\bar{x}_2 = 48{\cdot}54$

$\sigma_1 = 81{\cdot}64$ $\sigma_2 = 100{\cdot}42$

(1) இரண்டு நிறுவனங்களையும் ஒன்றாக்கி 1250 ($= N_1 + N_2$) பேர்களின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

$$\bar{x} = \frac{(596 \times 54{\cdot}65) + (654 \times 48{\cdot}54)}{(596 + 654)}$$

$$= \frac{32580{\cdot}40 + 31745{\cdot}16}{1250}$$

$$= 51{\cdot}46$$

(2) இரு நிறுவனங்களையும் ஒன்றாக்கிக் கணக்கிட்ட மாறுபாடு:

$$\sigma^2 = \frac{(N_1\sigma_1^2+N_2\sigma_2^2)}{N_1+N_2} + \frac{N_1 \times N_2}{(N_1+N_2)^2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$$

$$= \frac{(596\times 81{\cdot}64)+(654\times 100{\cdot}42)}{1250} + \frac{(596\times 654)}{(1250)^2} \times (54{\cdot}65 - 48{\cdot}54)$$

$$= \frac{48657{\cdot}44 + 65674{\cdot}68}{1250} + \frac{389784}{1690000} \times 37{\cdot}33$$

$$= 90{\cdot}66 + 8{\cdot}5859$$

$$= 99{\cdot}2459$$

மாதிரி 218

மூன்று டாக்டர்கள் சில குழுவினரைப் பரிசோதனை செய்து கண்ட எடைகள் பின்வருமாறு :

மூன்று குழுக்களையும் ஒன்றாக்கிக் கணக்கிடப்பட்ட பொதுக் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்.

டாக்டர்கள்	குழுவின் எண்ணிக்கை	கூட்டுச்சராசரி (பவுண்டின்)	திட்ட விலக்கம் (பவுண்டில்)
A	50	113	6
B	60	120	7
C	90	115	8

(சென்னைப் பல்கலை—1935)

தீர்வு :

இங்கு,

$\sigma_1 = 6 \qquad \sigma_2 = 7 \qquad \sigma_3 = 8$

$\bar{x}_1 = 113 \qquad \bar{x}_2 = 120 \qquad \bar{x}_3 = 115$

$n_1 = 50 \qquad n_2 = 60 \qquad n_3 = 90$

ஆகவே $\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1+n_2+n_3}$

$= \frac{(50\times113) + (60\times120) + (90\times115)}{50+60+90}$

$= \frac{5650 + 7200 + 10350}{200}$

$=$ **116** பவுண்டுகள்.

2. இங்கு,

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 113-116 = -3$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 120-116 = 4$

$d_3 = \bar{x}_3 - \bar{x} = 115-116 = -1$

$N = n_1+n_2+n_3$

$= 50+60+90$

$= 200$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(\sigma_1^2+d_1^2)+n_2(\sigma_2^2+d_2^2)+n_3(\sigma_3^2+d_3^2)}{n_1+n_2+n_3}}$$

$\therefore N\sigma^2 = n_1(\sigma_1^2+d_1^2)+n_2(\sigma_2^2+d_2^2)+n_3(\sigma_3^2+d_3^2)$

$= 50(36+9)+60(49+16)+90(64+1)$

$= (50\times45)+(60\times65)+(90\times45)$

$= 2250+3900+5850$

$= 12000$

$\therefore \sigma^2 = \frac{12000}{200}$

$=$ **60**

$\therefore \sigma = \sqrt{60}$

$=$ **7·7**

மாதிரி 219

A,B என்ற இரு தொழிற்சாலைகளில், தொழிலாளர்களுக்குக் கொடுத்த சம்பளப் புள்ளி விவரங்கள் கீழ்வருமாறு :

விவரம்	தொழிற் சாலை *A*	தொழிற் சாலை *B*
தொழிலாளர்கள் எண்ணிக்கை	586	648
மாதக் கூட்டுச் சராசரி (ரூபாயில்)	52·5	47·5
சம்பளப் பரவலின் மாறுபாடுகள்	100	121

(*a*) *A,B* என்ற இரு தொழிற்சாலைகளில் எத்தொழிற்சாலை அதிக மாதச் சம்பளம் தருகிறது ?

(*b*) தனிப்பட்டவர்களின் சம்பளத்தில் எந்த நிறுவனம் அதிக மாறுபாட்டைக் கொண்டுள்ளது ?

(*c*) *A, B* என்ற தொழிற்சாலைகளை ஒன்றெனக் கொண்டு கீழ்க் காண்பவற்றைக் கணக்கிடு :

(1) மாதக் கூட்டுச் சராசரி

(2) தனிப்பட்டவர்களின் சம்பள மாறுபாடு

(ஐ.ஏ.எஸ்.—1951)

தீர்வு :

(*a*) **தொழிற்சாலை** *A* :

தனித் தொழிலாளியின் மாதச் சம்பளக் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x}_1 = 52{\cdot}5 \text{ ரூபாய்}$$

மொத்தத் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை $n_1 = 586$

∴ எல்லாத் தொழிலாளர்களுக்கும் மாதச் சம்பளமாகக் கொடுக்கப்பட்ட மொத்தத் தொகை = ரு. 52·5 × 586

= **30765** ரூபாய்

தொழிற்சாலை B :

தனித் தொழிலாளியின் மாதச் சம்பளக் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x}_2 = 47{\cdot}5 \text{ ரூபாய்}$$

மொத்தத் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை

$$n_1 = 648$$

∴ எல்லாத் தொழிலாளர்களுக்கும் மாதச் சம்பளமாகக் கொடுக்கப்பட்ட மொத்தத் தொகை

$$= 47{\cdot}5 \times 648$$

$$= 30780 \text{ ரூபாய்.}$$

B என்ற தொழிற்சாலை A ஐ விட அதிகச் சம்பளம் கொடுக்கிறது.

(*b*) **தொழிற்சாலை** A :

சம்பளப் பரவலின் மாறுபாடு $\sigma_1^2 = 100$

சம்பளப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் $\sigma_1 = \sqrt{100} = 10$

மாறுவிகிதக் கெழு C. V. $= \dfrac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

$$= \frac{10}{52{\cdot}5} \times 100$$

$$= 19\%$$

தொழிற்சாலை B :

சம்பளப் பரவலின் மாறுபாடு $\sigma_2^2 = 121$

∴ சம்பளப் பரவலின் திட்ட விலக்கம் $\sigma_2 = \sqrt{121}$

$$= 11$$

மாறுவிகிதக் கெழு C. V. $= \dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2}$

$$= \frac{11}{47{\cdot}5} \times 100$$

$$= 23\%$$

இரண்டு தொழிற்சாலைகளின் மாறுவிகிதக் கெழுக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்பொழுது, தொழிற்சாலை B அதிக மாறுபாடுடையதாகத் தெரிகிறது.

(c) A, B என்ற இரு தொழிற்சாலைகளையும் ஒன்றெனக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட மொத்தத் தொழிலாளர்களின் கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x} = \frac{n_2 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{(586 \times 52 \cdot 5) + (648 \times 47 \cdot 5)}{586 + 648}$$

$$= \frac{61545 \cdot 0}{1234}$$

$$= \mathbf{49 \cdot 9} \text{ ரூபாய்}$$

இரு தொழிற்சாலைத் தொழிலாளர்களின் பொதுத் திட்ட விலக்கம் :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1+n_2} + \frac{n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n_1+n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(586 \times 100) + (648 \times 121) + 586(52 \cdot 5 - 49 \cdot 9)^2 + 648\,(47 \cdot 5 - 49 \cdot 9)^2}{586+648}}$$

$$= \sqrt{\frac{58600 \times 78408 + 3984 \cdot 6 + 3693 \cdot 6}{1234}}$$

$$= \sqrt{\frac{144686 \cdot 2}{1234}}$$

$$= \sqrt{117 \cdot 2}$$

$$= \mathbf{10 \cdot 8} \text{ ரூபாய்}$$

மாதிரி 220

பின்வரும் புள்ளி விவரங்கள் புதிதாகச் சேர்ந்தவர்களின் எடை விவரங்களைத் தருகிறது.

பல்கலைக் கழகம்	கூட்டுச் சராசரி (பவுண்டில்)	திட்ட விலக்கம் (பவுண்டில்)	புதிதாகச் சேர்ந்தவர்களின் எண்ணிக்கை
1	138·6	16 7	907
2	139·2	16·4	1102
3	138·9	17·3	841

எல்லா எடைகளையும் சேர்த்து, பொதுவாகக் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்.

(சென்னைப் பல்கலை—1950)

தீர்வு :

இங்கு,

$$\sigma_1 = 16{\cdot}7 \qquad \sigma_2 = 16{\cdot}4 \qquad \sigma_3 = 17{\cdot}3$$

$$\bar{x}_1 = 138{\cdot}6 \qquad \bar{x}_2 = 139{\cdot}2 \qquad \bar{x}_3 = 138{\cdot}9$$

$$n_1 = 907 \qquad n_2 = 1102 \qquad n_3 = 841$$

(1) ஆகவே, $\bar{\bar{x}} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1+n_2+n_3}$

$$= \frac{(907 \times 138{\cdot}6) + (1102 \times 139{\cdot}2) + (841 \times 138{\cdot}9)}{907+1102+841}$$

$$= \frac{125710{\cdot}2 + 153398{\cdot}4 + 116814{\cdot}9}{907+1102+841}$$

$$= \frac{395923{\cdot}5}{2850}$$

$$= \mathbf{138{\cdot}92}$$

(2) பொதுவான திட்ட விலக்கம் காணல் :

இங்கு $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 138{\cdot}6 - 138{\cdot}9 = -0{\cdot}3$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 139{\cdot}2 - 138{\cdot}9 = 0\,3$$

$$d_3 = \bar{x}_3 - \bar{x} = 138{\cdot}9 - 138{\cdot}9 = 0{\cdot}0$$

$$N = n_1+n_2+n_3 = 907+1102+841$$

$$\sigma = \left\{ \frac{n_1(\sigma_1{}^2+d_1{}^2)+n_2(\sigma_2{}^2+d_2{}^2)+n_3+(\sigma_3{}^2+d_3{}^2)}{n_1+n_2+n_3} \right\}$$

$$\therefore \quad N\sigma^2 = n_1(\sigma_1{}^2+d_1{}^2)+n^2(\sigma_2{}^2+d_2{}^2)+n_3(\sigma_3{}^2+d_3{}^2)$$

$$= 907(278{\cdot}89+0{\cdot}09)+1102(268{\cdot}96+0{\cdot}09) +841(299{\cdot}29+0{\cdot}0)$$

$$= 253034{\cdot}86+296493{\cdot}1+251702{\cdot}89$$

$$= 801230{\cdot}85$$

$$\sigma^2 = \frac{801280{\cdot}85}{2850}$$

$$= \mathbf{281{\cdot}13}$$

ஆகவே, $\sigma = \mathbf{16{\cdot}8}$

மாதிரி 221

35 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி 80 ; திட்ட விலக்கம் 4 ஆகும். 65 உறுப்புகள் கொண்ட இரண்டாவது மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி 70;. திட்ட விலக்கம் 3 ஆகும். ஒன்றாக இணைக்கப்பட்டு 100 உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ள புதிய மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்.

(பி.ஏ.—டெல்லி—1959)

தீர்வு :

மேற்கண்ட கணக்கின் மூலம் இரு மாதிரிகளின் புள்ளி விவரங்கள் முறையே,

$n_1 = 35 \qquad n_2 = 65$

$\bar{x}_1 = 80 \qquad \bar{x}_2 = 70$

$\sigma_1 = 4 \qquad \sigma_2 = 3$ ஆகும்.

ஆகவே, இரண்டு மாதிரிகளையும் இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$$

$$= \frac{(35 \times 80) + (65 \times 70)}{(35+65)}$$

$$= \mathbf{73{\cdot}5}$$

இங்கு,

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 80-73\cdot5 = 6\cdot5$$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 70-73\cdot5 = 3\cdot5$$

ஆகவே இரண்டு மாதிரிகளையும் இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் மாறுபாடு $= \sigma^2$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_1d_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_2d_2^2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{35(4)^2 + 35(6\cdot5)^2 + 65(3)^2 + 66(-3\cdot5)^2}{35 + 65}$$

$$= \frac{560 + 1478\cdot75 + 585 + 796\cdot25}{100}$$

$$= \frac{3420}{100}$$

$$= 34\cdot2$$

ஆகவே, திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{34\cdot2}$

$= 5\cdot85$ (தோராயமாக)

மாதிரி 222

இரண்டு மாதிரிகளின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைகள் முறையே 50, 100 என்றும், கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 54·1, 50·3 என்றும், திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 8, 7 என்றும் இருப்பின், ஒன்றாக இணைக்கப்பட்ட மொத்த 150 உறுப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியையும் திட்ட விலக்கத்தையும் காண்.

(பி.ஏ.—சென்னை-- 1953)

தீர்வு :

மேற்கண்ட கணக்கின் மூலம், இரு மாதிரிகளின் புள்ளி விவரங்கள் முறையே :

$n_1 = 50$ $n_2 = 100$

$\bar{x}_1 = 54\cdot1$ $\bar{x}_2 = 50\cdot3$

$\sigma_1 = 8$ $\sigma_2 = 7$

ஆகும். ஆகவே, இரண்டு மாதிரிகளையும் இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{(50 \times 54{\cdot}1) + (100 \times 50{\cdot}3)}{50 + 100}$$

$$= \frac{2705 + 5030}{150}$$

$$= \frac{7735}{150}$$

$= \mathbf{51{\cdot}57}$ **(தோராயமாக)**

இங்கு,

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = (54{\cdot}10 - 51{\cdot}75) = 2{\cdot}35$$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = (50{\cdot}30 - 51{\cdot}75) = -1{\cdot}45$$

ஆகவே, இரு மாதிரிகளையும் இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் மாறுபாடு

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 + 2}$$

$$= \frac{50(8)^2 + 50(2{\cdot}35)^2 + 100(7)^2 + 100(-1{\cdot}45)^2}{50 + 100}$$

$$= \frac{200 + 4900 + 320{\cdot}045 + 161{\cdot}29}{150}$$

$$= \frac{8581{\cdot}335}{150}$$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{8581{\cdot}335}{150}}$

$= \mathbf{7{\cdot}55}$ (தோராயமாக)

மாதிரி 223

இரு மாதிரிகளில் முதல் மாதிரி 100 உறுப்புகளையும், முறையே 15 ; 3 களை கூட்டுச் சராசரியாகவும், திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்டுள்ளது. மொத்தப் பிரிவு 280 உறுப்புகளையும், முறையே 15·6, $\sqrt{13{\cdot}14}$-களைக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், திட்ட விலக்க

மாகவும் : கொண்டிருந்தால் இரண்டாவது மாதிரியின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்.

(எம்.ஏ.—டெல்லி—1959)

தீர்வு :

ஒன்றிணைந்த இரு மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{(n_1 \bar{x}_1) + (n_2 \bar{x}_2)}{n_1 + n_2}$$

$$\therefore\ 15{\cdot}6 = \frac{(100 \times 15) + (150 \times \bar{x}_2)}{100 + 150}$$

அல்லது $3900 = 1500 + 150\,\bar{x}_2$

அல்லது $\bar{x}_2 = \frac{2400}{150} = 16$

∴ இரண்டாவது மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$ $= 16$

ஒன்றிணைந்த இரு மாதிரிகளின் திட்டவிலக்கம் σ $= \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n_1 + n^2}$

ஆகவே, $\sqrt{13{\cdot}44}$

$$= \sqrt{\frac{100 \times (3)^2 + 150\sigma_2^2 + 100(15{\cdot}6 - 15)^2 + 150(15{\cdot}6 - 16)}{250}}$$

அல்லது $\sqrt{13{\cdot}44} = \sqrt{\frac{900 + 15\sigma_2^2 + 36 + 24}{250}}$

அல்லது $13{\cdot}44 = \frac{960 + 150\,\sigma_2^2}{250}$

அல்லது $3360 = 960 + 150\,\sigma_2^2$

அல்லது $150\,\sigma_2^2 = 3360 - 960$

$= 2400$

$$\therefore \quad \sigma_2^2 = \frac{2400}{150}$$

$$= 16$$

ஆகவே $\sigma_2 = \sqrt{16}$

$$= 4$$

மாதிரி 224

A, B என்ற இரு மாதிரிகளின் அளவைகள் வருமாறு :

மாதிரி	உருவ அளவு	கூட்டுச் சராசரி	திட்ட விலக்கம்
A	20	44·8	8·3
B	30	47·3	6·5

A ஐயும், B ஐயும் இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரியையும், திட்ட விலக்கத்தினையும் காணக்கிடுக.

(சென்னைப் பல்கலை)

தீர்வு :

மேற்கண்ட பட்டியலின் படி A, B என்ற மாதிரிகளில் முறையே

$n_1 = 20$ $\quad n_2 = 30$

$\bar{x}_1 = 44{\cdot}8$ $\quad \bar{x}_2 = 47{\cdot}3$

$\sigma_1 = 8{\cdot}3$ $\quad \sigma_2 = 6{\cdot}5$ ஆகும்.

ஆகவே, A, B களை இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{(20 \times 44{\cdot}8) + (30 \times 47{\cdot}3)}{20 + 30}$$

$$= \frac{896 + 1419}{50}$$

$$= \frac{2315}{50}$$

$$= 46{\cdot}3$$

இங்கு,

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 44 \cdot 8 - 46 \cdot 3 = -1 \cdot 5$$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 47 \cdot 3 - 46 \cdot 3 = 1 \cdot 0$$

ஆகவே, A, B களை இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் மாறுபாடு

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_1 d_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_2 d_2^2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{20 \times (8 \cdot 3)^2 + 20 \times (-1 \cdot 5)^2 + 30 \times (6 \cdot 5)^2 + 30 \times (1 \cdot 0)^2}{20 + 30}$$

$$= \frac{(20 \times 68 \cdot 89) + (20 \times 2 \cdot 25) + (30 \times 42 \cdot 25) + (30 \times 1)}{50}$$

$$= \frac{1377 \cdot 80 + 45 + 1267 \cdot 50 + 30}{50}$$

$$\sigma^2 = 52 \cdot 406$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{52 \cdot 406}$$

$$= 7 \cdot 24 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 225

20 எண்ணிக்கை கொண்ட ஒரு மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி திட்ட விலக்கம் முறையே 45 ; 5·4 எனக் கணக்கிடப்பட்டது. சரி பார்க்கும்பொழுது, கணக்கில் சேர்த்த மதிப்பு 25 என்பது சரியான மதிப்பு அல்ல என்று கண்டறியப்பட்டது. இந்த மதிப்பை நீக்கிவிட்டு, மீத மதிப்புகளின் (1) கூட்டுச் சராசரி, (2) திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(பி. எஸ்ஸி.—சென்னை—1972)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 45$

எண்ணிக்கை $n = 20$

மதிப்புகளின் கூடுதல் $\Sigma x = 900$

தவறுதலாகக் கணக்கிட்ட எண்ணின் மதிப்பு $= 25$

இந்த மதிப்பை நீக்கிய பின்பு மதிப்புகளின் கூடுதல் $\left.\right\} \sum_{i=1}^{19} x_i = 900-25$

$= 875$

தற்போதைய எண்ணிக்கை $= 19$

ஆக, புதிய சராசரி $\bar{x} = \dfrac{875}{19}$

$= 46{\cdot}1$

புதிய திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2$$

இங்கு $n = 20$; $\bar{x} = 45$; $\sigma = 5{\cdot}4$

$$\therefore \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = [(5{\cdot}4)^2+(45)^2]\times 20$$

$$= 41083{\cdot}2$$

தவறுதலாகக் கணக்கிட்ட எண்ணின் மதிப்பு $= 25$

இம்மதிப்பை நீக்கியபின்பு $\left.\sum_{i=1}^{19} x_i^2 \right\} = 41083{\cdot}2 - (25)^2$

$= 40458{\cdot}2$

தவறுதலான எண்ணை நீக்கிய பின்பு புதிய திட்ட விலக்கம் $\left.\right\} = \sqrt{\dfrac{40458{\cdot}2}{19} - \left(\dfrac{875}{19}\right)^2}$

$= \sqrt{2129{\cdot}5 - (46{\cdot}1)^2}$

$= \sqrt{2129{\cdot}5 - 2125{\cdot}21}$

$= \sqrt{4{\cdot}19}$

$= 2{\cdot}05$

முடிவு : புதிய கூட்டுச் சராசரி $= 46{\cdot}1$

புதிய திட்ட விலக்கம் $= 2{\cdot}05$

மாதிரி 226

ஒரு தேர்வின் வெற்றி மதிப்பெண் 30 ஆகும். கீழ்க் காணும் அட்டவணை பையன்கள் பெண்கள் என்று பிரிவுபடுத்தப்பட்டு வெற்றி அடைந்தவர்களின் பரவலைத் தருகிறது :

மதிப்பெண்கள்	அலைவெண்	
	பையன்கள்	பெண்கள்
30—34	5	15
35—39	10	20
40—44	15	30
45—49	30	20
50—54	5	5
55—59	5	—
மொத்தம்	70	90

தோல்வியடைந்த 30 பையன்களையும் சேர்த்துக் கணக்கிடப் பட்ட பையன்களின் மதிப்பெண் பரவலுக்குக் கிடைக்கும் கூட்டுச் சராசரியும், திட்ட விலக்கமும் முறையே 38, 10 ஆகும். 10 தோல்வியடைந்த பெண்களையும் சேர்த்துக் கண்ட கூட்டுச் சராசரி திட்ட விலக்கம் முறையே 35, 9 ஆகும்.

தேர்வில் தோல்வியடைந்த 30 பையன்களின் மதிப்பெண் களுக்கு (1) கூட்டுச் சராசரியையும் (2) திட்ட விலக்கத்தையும் காண்.

(ஐ. ஏ. எஸ்.—1959)

தீர்வு :

மேற்கண்ட அட்டவணைக்குக் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

மத்திய மதிப்பு	ஊகச் சராசரி (42) யிலிருந்து விலக்கம்	f	fdx	fdx^2
32	—10	5	—50	500
37	— 5	10	—50	250
42	0	15	—	—
47	5	30	150	750
52	10	5	50	500
57	15	5	75	1125
		70	175	3125

$$\bar{x}_1 = A + \frac{\Sigma fdx}{\Sigma f} = 42 + \frac{175}{70} = 44{\cdot}5$$ மதிப்பெண்கள்

$$n = 70$$

$\bar{x}$ = எல்லா 100 பையன்களின் மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி $= -38$

$$n = n_1 + n_2 = 70 + 30$$

$$= 100$$

அப்படியானல் $$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{(n_1 + n_2)\bar{x} - n_1 \bar{x}_1}{n_2}$$

$$= \frac{(100 \times 38) - (70 \times 44{\cdot}5)}{30}$$

$$= \frac{3800 - 3115}{30}$$

$$= \frac{685}{30}$$

$$= \frac{137}{6}$$

$= 22{\cdot}83$ (தோராயமாக)

எல்லா 100 பையன்களின் மதிப்பெண்களின் ஒன்றிணைந்த திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{[n_1\sigma_1^2 + n_1(\bar{x}_1 - x)^2 + n_2\sigma_2^2 + n_4\sigma_2^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2]}{n_1 + n_2}}$$

இங்கு, $\sigma = 10$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma f dx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f dx}{\Sigma f}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3125}{70} - \left(\frac{175}{70}\right)^2}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{625}{14} - \frac{25}{4}$$

$$= \frac{1075}{28}$$

அல்லது

$$100 = \frac{70 < \frac{1075}{28} + 70(44\ 5-38)^2 + 30\sigma_2^2 + 30(22\ 83-38)}{100}$$

$$\therefore\ 1000 = 268{\cdot}75 + 295{\cdot}75 + 3\sigma_2^2 + 230{\cdot}13$$

அல்லது $3\sigma_2^2 = 1000 - 764{\cdot}63$

$$= 205{\cdot}37$$

$$\therefore\ \sigma_2^2 = 68{\cdot}46$$

$$\sigma_2 = \sqrt{68{\cdot}46}$$

$$= 8{\cdot}27 \text{ (தோராயமாக)}$$

இவ்வாறாக, தேர்வில் தேர்ச்சி பெறாத 30 மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் முறையே 22·83, 8·27 என்று கண்டறியலாம்.

மாதிரி 227

கினியின் சராசரி வித்தியாசம்

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கினியின் சராசரி வித்தியாசத்தைக் கணக்கிடுக :

10 13 16 20 25

அளவு	வித்தியாசம் Δ				மொத்தம்
10					
13	3				3
16	6	3			9
20	10	7	4		21
25	15	12	9	5	41
மொத்தம்	34	22	13	5	$\Sigma\Delta = 74$

$$m = \frac{1}{N}(N-1) = \frac{1}{2} \times 5(5-1)$$

$$= \tfrac{1}{2} \times 5 \times 4$$

$$= 10$$

g அல்லது $\Sigma\Delta = (34+22+13+5)$

$$= 74$$

அல்லது $= 3+9+21+41$

$$= 74$$

கினியின் சராசரி வித்தியாசம் $= \dfrac{g}{m}$

$$= \frac{74}{10}$$

$$= 7{\cdot}4$$

மாதிரி 228

கொடுக்கப்பட்டவை :

	எண்ணிக்கை	கூட்டுச் சராசரி	மாறுபாடு
I பிரிவு	—	20	—
II பிரிவு	60	—	35
I, II ஆவது பிரிவுகள் சேர்ந்த மொத்தம்	95	22	45

காணாத மதிப்புகளைக் காண்.

தீர்வு :

n_1 = (முதல் பிரிவின் எண்ணிக்கை) $= 95-60 = 35$

பொதுக் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}^2}{n_1+n_2}$

ஆகவே *II* பிரிவின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2 = \dfrac{x(n_1+n_2)-n_1\bar{x}_1}{n_2}$

$$= \frac{(20\times 95)-(35\times 20)}{60}$$

$= 23{\cdot}17$ **(தோராயமாக)**

I பிரிவின் மாறுபாடு கணக்கிடல் :

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1{}^2+n_2\sigma_2{}^2+n_1d_1{}^2+n_2d_2{}^2}{n_1+n_2}$$

$\therefore\ d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 20-22 = -2$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 23{\cdot}17-22 = 1{\cdot}17$

$\therefore\ d_1{}^2(-2)^2 = 4;\ d_2{}^2 = (1{\cdot}17)^2 = 1{\cdot}37$

ஆதலால் $45 = \frac{(35 \times \sigma_1^2)+(60 \times 35)+(35 \times 4)+(60 \times 1{\cdot}37)}{35 \times 60}$

அல்லது $45 = \frac{35\sigma_1^2+2100+140+82\ 20}{95}$

அல்லது $4275 = 35\sigma_1^2+2322\ 2$

$$\sigma_1^2 = \frac{4275-2322{\cdot}2}{35}$$

$$= \mathbf{55{\cdot}79}$$ (தோராயமாக)

ஆகையால் $n_1 = 35$; $\bar{x}_2 = 23{\cdot}17$; $\sigma_1^2 = 55{\cdot}79$.

3. கோட்டமும் தட்டையளவும்
(Skewness And Kurtosis)

கோட்டம் :

'ஒரு சமச்சீரான பரவலுக்கு மாறுபட்டு பரவலின் சராசரி மதிப்பிற்கு இரு புறமும் அலைவெண்கள் சமமற்றுப் பரவி அமைந்தால் அது கோட்டமுடைய அல்லது சமச்சீரற்ற பரவல் எனப் படும். எனவே ஒரு பரவல் சமச்சீருடையது எனில், அதன் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய மதிப்புகள் மாறுபடாது ஓரிடத்தில் பொருந்தும்.

பெரும்பாலும் அலைவெண் பரவல்கள் கீழ்க்காணும் நான்கு வகைகளில் அமைகின்றன :

(1) சமச்சீரான பரவல்

(2) ஓரளவு கோட்டமுடைய பரவல்

(3) முழுமையான கோட்டமுடைய அல்லது 'J' வடிவுடைய பரவல்

(4) 'U' வடிவுடைய பரவல்

என்பனவாகும்.

கோட்ட அளவைகள்
(Measures of Skewness)

I **முதல் அளவையும் அதன் கெழுக்களும்**

(1) கோட்டம் = இடைநிலை—முகடு = $M_e - M_o$

கோட்டக் கெழு (j) = $\dfrac{M_e - M_o}{\delta_{M_o}}$ **(முகட்டிலிருந்து சராசரி விலக்கம்)**

(2) கோட்டம் = கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலை = $\bar{x}-M_e$

கோட்டக் கெழு $(j) = \dfrac{\bar{x}-M_e}{\delta_{M_e}}$

(3) கோட்டம் = கூட்டுச் சராசரி - முகடு = $\bar{x}-M_o$

கோட்டக் கெழு $(j) = \dfrac{\bar{x}-M_o}{\delta_{M_o}}$

(4) கார்ல் — பியர்சனின் முறை :

கோட்டம் = $\bar{x}-M_o$

கோட்டக் கெழு $(j) = \dfrac{\bar{x}-M_o}{\sigma}$

(5) கார்ல் — பியர்சனின் முறை :

(முகடு கணக்கிட முடியாவிட்டால்)

கோட்டம் = 3 (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலை)

கோட்டக் கெழு $(j) = \dfrac{3\text{ (கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலை)}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$

$$= \frac{3(\bar{x}-M_e)}{\sigma}$$

II இரண்டாவது கோட்ட அளவு :

கோட்டம் $= (Q_3-M)-(M-Q_1)$

$= Q_3+Q_1-2M$

கோட்டக் கெழு $= \dfrac{(Q_3-M)-(M-Q_1)}{(Q_3-M)+(M-Q_1)}$

$$= \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$$

III மூன்றாவது கோட்ட அளவு :

கோட்டம் $= \dfrac{\sqrt[3]{\Sigma d^3}}{n}$

கோட்டக் கெழு $= 3\ \dfrac{\sqrt[3]{\Sigma d^2}}{\sigma}$

இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரங்கள் மூலம் கோட்ட அளவுகள் கணக்கிடல் மிகவும் கடினமான செயலாகும். ஆகவே, இவ்வளவு முறை உயர் புள்ளியியல் வேலைகளில் மட்டும் பயன் படுத்தப்படுகிறது.

IV **மற்றக் கோட்ட அளவு வகைகள் :**

கிராக்டனும் கவுடனும் (Croxton and Cowden)

(*a*) கோட்டம் $= P_{90}+P_{10}-2P_{50}$

$$\text{கோட்டக் கெழு} = \frac{P_{90}+P_{10}-2\,P_{50}}{P_{90}-P_{10}}$$

(*b*) கோட்டம் $= D_9+D_1-2\,D_5$

$$\text{கோட்டக் கெழு} = \frac{D_9+D_1-2\,D_5}{D_9-D_1}$$

விலக்க விசைப் பெருக்கச் சராசரி அல்லது மூமெண்ட்ஸ்ச் (Moments)

'விலக்கங்களில் விசைப் பெருக்கச் சராசரிகள் மூமெண்ட்ஸ்ச் கள் எனப்படும்.

இவை இரண்டு வகைப்படும்.

(1) ஊகச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்படுபவை;

(2) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்படுபவை என்பனவாகும்.

I. **ஊகச்** சராசரி (*A*)யிலிருந்து **கணக்கிடப்படும் விலக்க விசைப்** பெருக்கச் சராசரிகள் :

(1) தனித்த தொகுதி :

$$\text{முதல் மூமெண்ட்ஸ்ச்}\quad V_1 = \frac{\Sigma d}{n}$$

$$\text{இரண்டாம் மூமெண்ட்ஸ்ச்}\quad V_2 = \frac{\Sigma d^2}{n}$$

மூன்றும் மூமெண்ட்டீச் $V_3 = \frac{\Sigma d^3}{n}$

நான்காம் மூமெண்ட்டீச் $V_4 = \frac{\Sigma d^4}{n}$

(2) அலைவெண் பரவல் :

$$V_1 = \frac{\Sigma f dx}{n}$$

$$V_2 = \frac{\Sigma f dx^2}{n}$$

$$V_3 = \frac{\Sigma f dx^3}{n}$$

$$V_4 = \frac{\Sigma f dx^4}{n}$$

இங்கு, $dx = (x-A)$ ஆகும்.

II. உண்மையான கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து $(\bar{x})$ கணக்கிடப் படும் விலக்க விசைப் பெருக்கச் சராசரிகள் :

(1) தனித்த தொகுதி :

முதல் மூமெண்ட்டீச் $\mu_1 = \frac{\Sigma d}{n} = 0$

இரண்டாவது மூமெண்ட்டீச் $\mu_2 = \frac{\Sigma d^2}{n}$

மூன்றுவது மூமெண்ட்டீச் $\mu_3 = \frac{\Sigma d^3}{n}$

நான்காவது மூமெண்ட்டீச் $\mu_4 = \frac{\Sigma d^4}{n}$

இங்கு, $d = x-\bar{x}$ ஆகும்.

(2) அலைவெண் பரவலுக்கு (தொடர் தொகுதிக்கு) :

$$\mu = \frac{\Sigma f d}{n} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma f d^2}{n}$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma f d^3}{n}$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma f d^4}{n}$$

இங்கு $d = (x - \bar{x})$ ஆகும்.

இரண்டு மூமெண்ட்ஃச் வகைகளின் சார்பு :

$\mu_1 = V_1 - V_1$ = சராசரி விலக்கம்

$\mu_2 = V_2 - V_1^2$ = மாறுபாடு

$\mu_3 = V_3 - 3V_1 V_2 + 2V_1^3$

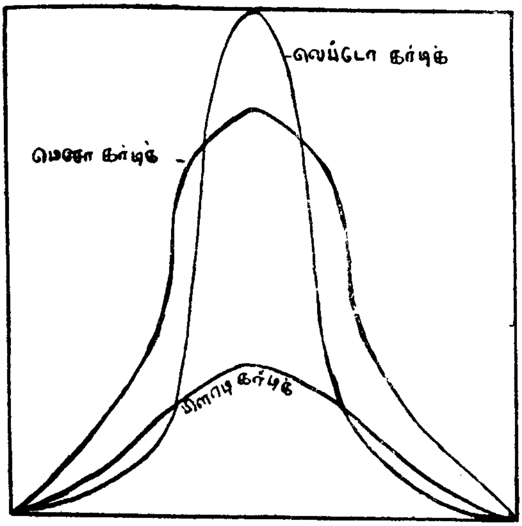
$\mu_4 = V_4 - 4 V_3 V_1 + 6V_2 V_1^2 - 3V_1^4$

இங்கு, முதல் மூமெண்ட்ஃச் கூட்டுச் சராசரியையும், இரண்டாம் மூமெண்ட்ஃச் விலக்கத்தையும், மூன்றும் மூமெண்ட்ஃச் கோட்டத்தையும், நான்காம் மூமெண்ட்ஃச் தட்டையளவையும் கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலிலிருந்து அளந்தறிந்து கணக்கிடப் பயன்படுகின்றன.

தட்டையளவுகள் அல்லது கர்டாசிஃச்கள் (Kurtosis)

அலைவெண் வளைகோடுகளின் உச்சி முனை, தட்டைப் புள்ளியியலில் கர்டாசிஃச் எனப்படுகிறது. கோட்டமற்ற சமச் சீரான பரவல்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க இது பயன்படுகிறது. சமச்சீரான அலைவெண் பரவலில், அலைவெண்கள் மையத்தில் மிகவும் செறிந்து காணப்பட்டால் அப் பரவலின் அலைவெண் வளைகோடு மையத்தில் உயர்ந்து, உச்சி முனையில் தட்டை குறைந்து இருக்கும். இவ்வித அலைவெண் வளைகோடுகள் குறைதட்டை அல்லது லெப்டோகர்டிக் எனப்படுகின்றன. அலைவெண்கள் மையத்தில் செறிவற்று இருப்பின், அலைவெண் வளைகோடு அதிகத் தட்டையுடையதாக இருக்கும். இவ்வித அலைவெண் வளைகோடுகள் மிகைத்தட்டை அல்லது பிளாடிகர்டிக் எனப்படுகின்றன. இரண்டு நிலைகளுக்கும் இடைப்பட்ட நிலையில் மணி வடிவில் அமையும் அலைவெண் வளைகோடுகள் மெசோகர்டிக் எனப்படுகின்றன.

இவைகளைக் கீழ்வரும் வளைகோடுகளின் படத்தின் மூலம் நன்கு புரிந்து கொள்ளலாம்.



படம் 3

பீட்டாக் கெழுக்கள்

மூமென்ட்ஃச்சுகளின் சார்பலன்களே இப் பீட்டாக் கெழுக்களாக அமைகின்றன. வெவ்வேறு வகைகளான அலைவெண் பரவல்களை விவரிக்கவும், வித்தியாசப்படுத்தவும் இவைகள் பயன் படுகின்றன. இரண்டு முக்கிய பீட்டாக் கெழுக்கள் β_1, β_2 (β என்பது கிரேக்க எழுத்தாகும்) என்பன கோட்டத்தையும், தட்டையளவையும், அளந்து அறிய முறையே பயன்படுகின்றன.

$$\beta_1 = \frac{(\text{கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மூன்றும் மூமென்ட்ஃச்})^2}{(\text{கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட இரண்டாம் மூமென்ட்ஃச்})^3}$$

$$= \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

பொதுவாக $\sqrt{\beta_1}$ ஐ, கோட்ட அளவுகளை அளக்கப் பயன் படுத்துகிறோம்.

அதேபோல்

$$\beta_2 = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட நான்காம் மூமென்ட்ஃச்}}{[\text{கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட இரண்டாம் மூமென்ட்ஃச்}]^2}$$

$$= \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}}$$

$$= \frac{\mu_4}{\sigma^2}$$

இவ்விரண்டாவது பீட்டாக் கெழுவைப் பொதுவாக தட்டையளவுகளை அல்லது கர்டாசீஃச் அளவுகளை அளக்கப் பயன்படுத்துகிறோம்.

கர்டாசீஃச் அளவைகள்

கர்டாசீஃச் நாலாவது மூமென்ட்ஃச்சின் அடிப்படையில் காணப்படுகின்றது. சமச்சீரான இயல்நிலைப் பரவலின் 4 ஆவது மூமென்ட்ஃச்சின் அளவு 3-க்குச் சமம். எனவே 3-க்கு மேலுள்ள எச்சமே கர்டாசீஃச்சின் அளவு ஆகும். கர்டாசீஃச் என்பது 'K' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது.

$$K = \beta_2 - 3$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$K = -$ ஆனால் அது பிளாடிகர்டிக்.

$K = +$ ஆனால் அது லெப்டிகர்டிக்.

$K = 0$ ஆனால் அது மெசோகர்டிக் எனக் கொள்கிறோம்.

மாதிரி 229

கீழ்க் காணும் எண்களின் கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

35, 25, 33, 50, 37, 35, 33, 35, 30

தீர்வு :

ஏற்ற மதிப்பு வரிசையில் அமைத்து கணக்கிடப்படும் பட்டியல் :

(x)	35-லிருந்து விலக்கங்கள் (d_x)	d_x^2
25	—10	100
30	— 5	25
33	— 2	4
33	— 2	4
35	0	0
35	0	0
35	0	0
37	2	4
50	15	225
மொத்தம் = 313	—2	362

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{313}{9}$

$= 34 \cdot 8$

முகடு : $M_o = 35$ (அதிக அலைவெண் கொண்ட எண்)

திட்டவிலக்கம் : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{362}{9} - \left(\frac{-2}{9}\right)^2}$

$= \sqrt{40 \cdot 2222 - 0 \cdot 0494}$

$= 6 \cdot 34$

கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு

$= \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$

$= \frac{34 \cdot 8 - 35}{6 \cdot 34}$

$= -0 \cdot 0315$

மாதிரி 230

ஒரு வகுப்பின் 10 மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. கால்மானங்களைக் கணக்கிட்டு, கோட்டக் கெழுவைக் காண்.

10, 12, 14, 13, 20, 27, 15, 18, 36, 25

தீர்வு :

ஏற்ற வரிசை மதிப்பில் மதிப்பெண்களை அமைக்கவும்.

10, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 25, 27, 36

இடைநிலை : $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ஆவது உறுப்பு மதிப்பு

$= \left(\frac{10+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= 5{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பு மதிப்பு

$= \dfrac{5 \text{ ஆவது உறுப்பு மதிப்பு} + 6\text{ஆவது உறுப்பு மதிப்பு}}{2}$

$= \dfrac{15+18}{2}$

$= \mathbf{16{\cdot}5}$

முதல் கால்மானம் $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பு மதிப்பு

$= \left(\frac{10+1}{4}\right)$,, ,, ,,

$= 2{\cdot}75$,, ,, ,,

$= 2$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு $+ \frac{3}{4}$ (3 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு$-$2ஆவது உறுப்பு மதிப்பு)

$= 12+\frac{3}{4}\ (13-12)$

$= 12+0{\cdot}75$

$= \mathbf{12{\cdot}75}$

மூன்றும் கால்மானம் $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 3\left(\frac{10+1}{4}\right)$,, ,, ,,

$= 8{\cdot}25$,, ,, ,,

= 8 ஆவது உறுப்பு மதிப்பு $+\frac{1}{4}$(9 ஆவது உறுப்பு மதிப்பு—8ஆவது உறுப்பு மதிப்பு)

$= 25+\frac{1}{4}\ (27-25)$

$= 25 + 0{\cdot}5$

$= 25{\cdot}5$

கோட்டக் கெழு $= \frac{Q_3+Q_1-2M_e}{Q_3-Q_1}$

$= \frac{25{\cdot}5+12{\cdot}75-2(16{\cdot}5)}{25{\cdot}5 - 12{\cdot}75}$

$= \frac{38{\cdot}25-33}{12{\cdot}75}$

$= \frac{5{\cdot}25}{12{\cdot}75}$

$= \mathbf{0{\cdot}41}$

மாதிரி 231

விலைகளின் வாரக் குறியீட்டெண்கள் : 120, 125, 128, 119 120, 125, 124, 131.

மேற்கண்ட புள்ளி விவரங்களின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

கோட்டக் கெழு கணக்கிடல் :

குறியீட்டெண்கள் (x)	உண்மைச் சராசரி (= 124) யிலிருந்து விலக்கம் d_x	d_x^2
120	–4	16
125	1	1
128	4	16
119	–5	25
120	–4	16
125	1	1
124	0	0
131	7	49
மொத்தம் = 992		124

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{992}{8}$

$= \mathbf{124}$

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{8+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 4{\cdot}5$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

(ஏற்ற வரிசையில் உறுப்புகளை எழுதியபின்பு)

$= \frac{124+125}{2}$

$= \mathbf{124{\cdot}5}$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{n}} = \sqrt{\frac{124}{8}}$

$= 3{\cdot}94$

கோட்டக் கெழு $= \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\sigma}$

$= \frac{3(124 - 124{\cdot}5)}{3{\cdot}94} = \frac{-1{\cdot}5}{3{\cdot}94}$

$= -0{\cdot}38$

மாதிரி 232

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்கு (1) மாறு விகிதக் கெழு (2) கோட்டக் கெழு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடுக:

உறுப்பு அளவு	6	7	8	9	10	11	12
அலைவெண்	3	6	9	13	8	5	4

தீர்வு :

உறுப்புகளின் அளவு x	அலைவெண் f	ஊகச் சராசரி ($A = 9$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	fd_x	fd_x^2
6	3	—3	- 9	27
7	6	—2	-12	24
8	9	—1	- 9	9
9	13	0	0	0
10	8	1	8	8
11	5	2	10	20
12	4	3	12	36
மொத்தம்	$\Sigma f = 48$		$\Sigma fd_x = 0$	$\Sigma fd_x^2 = 124$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d_x}{n} = 9+0$

$= 9$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d_x}{n} - \left(\frac{\Sigma f d_x}{n}\right)}$

$= \sqrt{\frac{124}{48}}$

$= 1{\cdot}6$

மாறு விகிதக் கெழு C. V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{1{\cdot}6}{9} \times 100$

$= 18$ (தோராயமாக)

முகடு பிரிவு சேர் முறையில் கணக்கிடல் :

பிரிவு சேர் பட்டியல்

உறுப்பின் அளவு	அலைவெண்					
	I	II	III	IV	V	VI
6	3	9		18		
7	6		15		8	
8	9	22				30
9	13		21	26		
10	8	13			17	
11	5		9			
12	4					

பகுப்பாய்வுப் பட்டியல்

பத்தி	கூடிய அலைவெண்கள் கொண்ட உறுப்புகளின் அளவு							
I				9				
II			8	9				
III				9	10			
IV				9	10	11		
V		7	8	9				
VI			8	9	10			

ஆகவே முகட்டு அளவு = 9

$$\text{கோட்டக் கெழு} = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$= \frac{9-9}{1{\cdot}6}$$

$$= 0$$

மாதிரி 233

கீழ்க் காணும் பட்டியல் 230 ஆட்களின் சம்பளத்தைத் தருகிறது.

(1) திட்ட விலக்கம்

(2) கோட்டக் கெழு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

சம்பளம் (ரூபாயில்)	ஆட்களின் எண்ணிக்கை	சம்பளம் (ரூபாயில்)	ஆட்களின் எண்ணிக்கை
70— 80	12	110—120	50
80— 90	18	120—130	45
90—100	35	130—140	20
100—110	42	140—150	8

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1940

தீர்வு :

சம்பளம் (ரூபாயில்)	மத்திய மதிப்பு x	ஆட்களின் எண்ணிக்கை f	$d_x' = \left(\frac{x-115}{10}\right)$	fd_x'	$fd_x'^2$
70— 80	75	12	−4	−48	192
80— 90	85	18	−3	−54	162
90—100	95	35	−2	−70	140
100—110	105	42	−1	−42	42
110—120	115	50	0	0	0
120—130	125	45	1	45	45
130—140	135	20	2	40	80
140—150	145	8	3	24	72
		$\Sigma f = 230$		$\Sigma fd_x' = -105$	$\Sigma fd_x' = 733$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd_x'}{n} \times C$

$$= 115 + \frac{-105}{230} \times 10$$

$$= 115 + \frac{-105}{23} = 115 - 4{\cdot}6$$

= ரூ. 110·4 (தோராயமாக)

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \left\{ \frac{\Sigma fd_x'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd_x'}{\Sigma f}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times C$

$$= \left\{ \frac{733}{230} - \left(\frac{-105}{230} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times 10$$

$$= \sqrt{2 \cdot 98} \times 10$$

= ரூ. 17·3 (தோராயமாக)

அதிக அலைவெண் 50, விழும் பிரிவு 110—120 ஆகும்.

ஆகவே முகடு $M_o = 110 + \frac{50-42}{100-42-45} \times 100$

= ரூ. 116·1

கோட்டக் கெழு $= \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$

$$= \frac{110 \cdot 4 - 116 \cdot 1}{17 \cdot 3}$$

$$= -0 \cdot 3$$

மாதிரி 234

கீழ்க் காணும் பட்டியல் பத்து மாணவர்கள் பொருளாதாரம். கணக்குப் பாடங்களில் வாங்கியமதிப் பெண்களைத் தருகிறது. கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

பொருளாதாரம்	25	50	45	30	70	42	36	48	34	60
கணக்கு	10	70	50	20	95	55	42	60	48	80

(பி.காம்.—ஆக்ரா - 1950)

தீர்வு :

ஏறுவரிசை மதிப்பில் மதிப்பெண்களை அமைத்த பின்பு :

பொருளாதாரப் பாடம்			கணக்குப் பாடம்		
மதிப் பெண்கள் x	உண்மைச் சராசரி $(\bar{x}=14)$ யிலிருந்து விலக்கம் d_x	d_x^2	மதிப் பெண்கள் y	உண்மைச் சராசரி $((\bar{y})=53)$ யிலிருந்து விலக்கம் d_y	d_y^2
25	—19	361	10	—43	1849
30	– 14	196	20	—33	1089
34	—10	100	42	—11	121
36	— 8	64	48	—5	25
46	— 2	4	50	—3	9
45	1	1	55	2	4
48	4	16	60	7	49
50	6	36	70	17	289
60	16	254	80	27	729
70	26	676	95	42	1764
$\Sigma x=440$		$\Sigma d_x^2 = 1710$	$\Sigma y=530$		$\Sigma d_y^2 = 5928$

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ அல்லது $\left(\frac{10+1}{2}\right)$ அல்லது 5·5 ஆவது உறுப்பு மதிப்பு

பொருளாதாரப் பாடம் :

இடைநிலை M_e = 5·5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$$= \frac{42+45}{2}$$

$$= 43·5$$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{440}{10}$

$$= 44$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{n}} = \sqrt{\frac{1710}{10}}$

$= 13{\cdot}08$

கோட்டக் கெழு $j = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\sigma}$

$= \frac{3(44-43{\cdot}5)}{13{\cdot}08}$

$= \frac{1{\cdot}5}{13{\cdot}08}$

$= 0{\cdot}11$

கணக்குப் பாடம் :

இடைநிலை M_e = 5·5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \frac{50+55}{2}$

$= 52\ 5$

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{530}{10}$

$= 53$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_y^2}{n}} = \sqrt{\frac{5928}{10}}$

$= 24{\cdot}34$

கோட்டக் கெழு $j = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\sigma}$

$= \frac{3(53-52{\cdot}5)}{24{\cdot}34}$

$= \frac{1{\cdot}5}{24{\cdot}34}$

$= 0{\cdot}062$

மாதிரி 235

கீழே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு பிரிவுகளின் கோட்டக் கெழுக்களைக் கணக்கிட்டு, எந்தப் பரவல் அதிகக் கோட்டமுடையதாக இருக்கிறது எனக் காட்டு.

மதிப்பெண்கள்	பிரிவு *A*	பிரிவு *B*
55—58	12	20
58—61	17	22
61 64	23	25
64—67	18	13
67—70	11	7

(எம்.ஏ.—ஆக்ரா—1954)

மதிப்பெண்கள்	மத்திய மதிப்பு	$d'\left(=\frac{x-A}{3}\right)$ $A=62{\cdot}5$	பிரிவு *A*			பிரிவு *B*		
			f	fd'	fd'^2	f	fd'	fd'^2
55—58	56·5	—2	12	—24	48	20	—40	80
58—61	59·5	—1	17	—17	17	22	—22	22
61—64	62·5	0	23	0	0	25	0	0
64—67	65·5	1	18	18	18	13	13	13
67—70	68·5	2	11	22	44	7	14	28
		மொத்தம்	81	—1	127	87	—35	143

பிரிவு *A* :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times C$

$$= 62{\cdot}5 + \frac{-1}{81} \times 3$$

$$= \mathbf{62{\cdot}46}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \left\{ \frac{\Sigma f d'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f d'}{n} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times C$

$= \left\{ \frac{127}{81} - \left(\frac{-1}{81} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times C$

$= 3{\cdot}75$

முகடு $M_o = 61 + \frac{23-17}{46-17-18} \times 3$

$= 62{\cdot}63$

கோட்டக் கெழு $j = \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$

$= \frac{62{\cdot}46 - 62{\cdot}63}{3{\cdot}75}$

$= -0{\cdot}03$

பிரிவு B :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = 62{\cdot}5 + \frac{-35}{87} \times 3$

$= 61{\cdot}3$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \left\{ \frac{143}{87} - \left(\frac{-35}{87} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times 3$

$= 3{\cdot}6$

முகடு $M_o = 61 + \frac{25-22}{50-22-13} \times 3$

$= 61{\cdot}6$

கோட்டக் கெழு $j = \frac{\bar{y} - M_o}{\sigma}$

$= \frac{61{\cdot}3 - 61{\cdot}6}{3{\cdot}6}$

$= -0{\cdot}18$

பிரிவு A, B-க்களின் கோட்டக் கெழுக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க, பிரிவு B, பிரிவு A ஐ விட அதிகக் கோட்டமுடையதாகத் தெரிகிறது.

மாதிரி 236

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு (1) கூட்டுச் சராசரி (2) முகடு (3) திட்ட விலக்கம் (4) கோட்டக் கெழு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டு (கீழாக)	10	20	30	40	50	60
ஆட்கள் எண்ணிக்கை f	15	32	51	78	97	109

(பி. சி. எஸ்.— 1952)

தீர்வு :

கூட்டுச் சராசரி, முகடு,......ஆகியவை கணக்கிடல்.

ஆண்டு	மத்திய மதிப்பு x	ஆட்கள் எண்ணிக்கை f	$d_x' \left(=\frac{x-35}{10}\right)$	fd_x'	$fd_x'^2$
0—10	5	15	−3	−45	135
10—20	15	17	−2	−34	68
20—30	25	19	−1	−19	19
30—40	35	27	0	0	0
40—50	45	19	1	19	19
50—60	55	12	2	24	48
மொத்தம்		109		−55	289

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d_x'}{n} \times C$

$$= 35 + \frac{-55}{109} \times 10$$

= 29·95 ஆண்டுகள்

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \left\{ \frac{289}{109} - \left(\frac{-55}{109}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times 10$

= 15·49 ஆண்டுகள்,

$$\text{முகடு} \quad M_o = l_o + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$$

$$= 30 + \frac{27-19}{54-19-19} \times 10$$

$$= 30+5$$

$$= \mathbf{35}$$

$$\text{கோட்டக் கெழு } j = \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$$

$$= \frac{29{\cdot}95 - 35}{15{\cdot}49}$$

$$= \frac{-5{\cdot}05}{15{\cdot}49}$$

$$= \mathbf{-0{\cdot}32}$$

மாதிரி 237

கீழே தரப்பட்டுள்ள பட்டியல், 100 மாணவர்கள் ஒரு பள்ளித் தேர்வில் எடுத்த மதிப்பெண்களின் அலைவெண் பரவலாகும். கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக :

மதிப்பெண்கள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
10—20	3
20—30	7
30—40	20
40—50	30
50—60	15
60—70	10
70—80	7
80—90	5
90—100	3
மொத்தம்	100

(எம்.ஏ. — ஆக்ரா — 1964)

தீர்வு :

மதிப்பெண்கள்	f	ஊகச் சராசரி ($A=45$) யிலிருந்து விலக்கம் dx	fd_x	fd_x^2
10— 20	3	—30	— 90	2700
20— 30	7	—20	—140	2800
30— 40	20	—10	—200	2000
40— 50	30	0	0	0
50— 60	15	10	150	1500
60— 70	10	20	200	4000
70— 80	7	30	210	6300
80— 90	5	40	200	8000
90—100	3	50	150	7500
மொத்தம்	100		480	34800

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f dx}{n}$

$$= 45 + \frac{480}{100}$$

$$= \mathbf{49 \cdot 8}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d_x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f d_x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{34800}{300} - \left(\frac{480}{100}\right)^2}$$

$$= 18 \cdot 02$$

முகடு $M_o = l_o + \frac{f_2}{f_2 + f_o} \times C$

$$= 40 + \frac{15}{15+20} \times 10$$

$$= 44 \cdot 3$$

கோட்டக் கெழு $j = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma}$

$= \frac{49 \cdot 8 - 44 \cdot 3}{18 \cdot 02}$

$= 0 \cdot 3$

மாதிரி 238

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கால்மானக் கோட்டக் கெழுவைக் காண்.

எடை (பவுண்டுகளில்)	70–80	80–90	90–100	100–110
ஆட்கள் எண்ணிக்கை	12	18	35	49
எடை (பவுண்டுகளில்)	110–120	120–130	130–140	140–150
ஆட்கள் எண்ணிக்கை	50	45	20	8

(பி. காம்.—சென்னை—1950)

தீர்வு :

எடை (பவுண்டில்)	ஆட்கள் எண்ணிக்கை f	குவி அலைவு $c \cdot f$
70— 80	12	12
80— 90	18	30
90—100	35	65
100—110	49	114
110—120	50	164
120—130	45	209
130—140	20	229
140—150	8	237

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{237+1}{2}\right)$,, ,, ,,

$= 119$,, ,, ,,

119 ஆவது உறுப்பு 110—120 என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

$$\text{ஆகவே } M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) - C}{f} \times h$$

$$= 110 + \frac{119-114}{50} \times 10$$

$= 111$ **பவுண்டுகள்**

முதல் கால்மானம் $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{237+1}{4}\right)$,, ,, ,,

$= 59{\cdot}5$,, ,, ,,

59·5 ஆவது உறுப்பு 90—100 என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

$$\text{ஆகவே } Q_1 = 90 + \frac{59{\cdot}5-30}{35} \times 10$$

$= 98{\cdot}4$ **பவுண்டுகள்.**

மூன்றும் கால்மானம் $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= 3\left(\frac{237+1}{4}\right)$,, ,, ,,

$= 178{\cdot}5$,, ,, ,,

178·5 ஆவது உறுப்பு 120—130 என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

$$\text{ஆகவே, } Q_3 = 120 + \frac{178{\cdot}5-164}{45} \times 10$$

$$= 120 + \frac{14{\cdot}5 \times 10}{45}$$

$= 123{\cdot}2$ **பவுண்டுகள்**

கோட்டக் கெழு $j = \frac{Q_3+Q_1-2M_e}{Q_3-Q_1}$

$= \frac{123 \cdot 2+98 \cdot 4-2(111)}{123 \cdot 2-98 \cdot 4}$

$= -0 \cdot 016$

மாதிரி 239

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்குக் கோட்டக் கெழு காண்.

x	0—5	5—10	10—15	15—20
f	2	5	7	13
x	20—25	25—30	30—35	35—40
f	21	16	8	3

(பி.காம்.—அலிகார்—1952)

தீர்வு :

மாறி (பிரிவு)	மத்திய மதிப்பு x	அலை வெண் f	ஊகச் சராசரி $(A=22 \cdot 5)$ யிலிருந்து படி விலக்கம் d_x'	$d_x'^2$	fd_x'	$fd_x'^2$
0— 5	2·5	2	—4	16	— 8	32
5—10	7·5	5	—3	9	—15	45
10—15	12·5	7	—2	4	—14	28
15—20	17·5	13	—1	1	—13	13
20—25	22·5	21	0	0	0	0
25—30	27·5	16	1	1	16	16
30—35	32·5	8	2	4	16	32
35—40	37·5	3	3	9	9	27
மொத்தம்		75			—9	193

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d_x'}{n} \times C$

$$= 22{\cdot}5 + \frac{-9}{75} \times 5$$

$$= \mathbf{21{\cdot}9}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d_x'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f d_x'}{n}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{193}{75} - \left(\frac{-9}{75}\right)} \times 5$$

$$= 1{\cdot}6 \times 5$$

$$= \mathbf{8}$$

முகடு $M_o = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times C$

$$= 20 + \frac{21-13}{42-13-16} \times 5$$

$$= \mathbf{23{\cdot}08}$$

கோட்டக் கெழு $j = \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$

$$= \frac{21{\cdot}9 - 23{\cdot}08}{8} = -\frac{1{\cdot}18}{8}$$

$$= \mathbf{-0{\cdot}148}$$

மாதிரி 240

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்கு,

1. திட்ட விலக்கக் கெழு
2. கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு

ஆகியவற்றைக் காண்.

எடை (பவுண்டில்)	ஆட்கள் எண்ணிக்கை
70— 79·99	12
80— 89·99	18
90— 99·99	35
100—109·99	42
110—119·99	50
120—129·99	45
130—139·99	20
140—149·99	8

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1962)

தீர்வு :

பிரிவு	f	d_x	fd_x	fd_x^2
70— 80	12	—4	—48	192
80— 90	18	—3	—54	162
90—100	35	—2	—70	140
100—110	42	—1	—42	42
110—120	50	0	0	0
120—130	45	1	45	45
130—140	20	2	40	80
140—150	8	3	24	72
மொத்தம்	230		—105	733

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd_x}{n} \times C$

$$= 115 + \frac{-105}{230} \times 10$$

$$= 110{\cdot}435$$

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd_x'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd_x'}{n}\right)^2} \times C$$

$$= \sqrt{\frac{733}{230} - \left(\frac{-105}{230}\right)^2} \times 10$$

$$= 17{\cdot}26$$

$$\text{முகடு } M_o = l_o + \frac{f_2}{f_2 + f} \times C$$

$$= 110 + \frac{45}{45+42} \times 10$$

$$= 110 + 5{\cdot}17$$

$$= 115{\cdot}17$$

$$\text{திட்ட விலக்கக் கெழு} = \frac{\text{திட்ட விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$$

$$= \frac{17{\cdot}26}{110{\cdot}435}$$

$$= 0{\cdot}156$$

$$\text{கோட்டக் கெழு } j = \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$$

$$= \frac{(110 \cdot 435 - 115{\cdot}17)}{17{\cdot}26}$$

$$= -\frac{4{\cdot}735}{17{\cdot}26}$$

$$= -0{\cdot}274$$

மாதிரி 241

கீழே தரப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவல் பட்டியலுக்குக் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக :

உறுப்பு அளவு	அலைவெண்	உறுப்பு அளவு	அலைவெண்
2	3	8	10
3	8	9	8
4	10	10	17
5	12	11	5
6	16	12	4
7	14	13	1

(கோசும், சௌத்ரியும்—பக். 174)

தீர்வு :

உறுப்பு அளவு (x)	அலைவெண் (f)	fx	$c.f.$	$\|d_{me}\|$ $m_e = 7$	$f\|d_{me}\|$
2	3	6	2	5	15
3	8	24	11	4	32
4	10	40	21	3	30
5	12	60	33	2	24
6	16	96	49	1	16
7	14	98	63	0	0
8	10	80	73	1	10
9	8	72	81	2	16
10	17	170	98	3	51
11	5	55	103	4	20
12	4	48	107	5	20
13	1	13	108	6	6
மொத்தம்	108	762			240

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{762}{108}$

$= 7{\cdot}05$ (தோராயமாக)

இடைநிலை M_e $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு மதிப்பு

$= \left(\frac{108+1}{2}\right)$,, ,, ,,

$= 54{\cdot}5$,, ,, ,,

$= 7$ (தோராயமாக)

இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட கூட்டுச்சாரசரி விலக்கம் δ_{M_e} $\Big\} = \frac{\Sigma f|d_{me}|}{n}$

$= \frac{240}{108}$

$= 2{\cdot}2$ (தோராயமாக)

கோட்டக் கெழு j $= \frac{\bar{x} - M_e}{\delta_{M_e}}$

$= \frac{7{\cdot}05 - 7}{2{\cdot}2}$

$= 0{\cdot}022$ (தோராயமாக)

மாதிரி 242

கீழே தரப்பட்டுள்ள அலைவெண் பரவலுக்குக் கால்மானக் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக :

பிரிவு x	அலைவெண் f
0— 5	9
5—10	12
10—15	18
15—20	26
20—25	16
25—30	13
30—35	7
35—40	4
40—45	3

(பி எஸ்சி.—சென்னை—1968)

தீர்வு :

கால்மானக் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	அலைவெண் f	குவிஅலைவெண் $c.f$
0— 5	2.5	9	9
5—10	7.5	12	21
10—15	12.5	18	39
15—20	17.5	26	65
20—25	22.5	16	81
25—30	27.5	13	94
30—35	32.5	7	101
35—40	37.5	4	105
40—45	42.5	2	107
மொத்தம்		107	

முதல் கால்மானம் $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

$= \left(\frac{107+1}{4}\right)$,, ,, ,,

$= 27$,, ,, ,,

27 ஆவது உறுப்பு '10 — 15' என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே, $$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{n+1}{4}\right) - C}{f} \times h$$

$$= 10 + \frac{27-21}{18} \times 5$$

$$= 10 + \frac{6 \times 5}{18}$$

$$= 10 + 1{\cdot}667$$

$$= \mathbf{11{\cdot}667}$$

இடைநிலை $M_e = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{107+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது 54 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பாகும்.

54 ஆவது உறுப்பு '15—20' என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே, இடைநிலை $M_e = 15 + \frac{54-39}{26} \times 5$

$$= 15 + 2{\cdot}88$$

$$= \mathbf{17{\cdot}88}$$

மூன்றாவது கால்மானம் $Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

= 81 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

81 ஆவது உறுப்பு '20 25' ஆவது பிரிவில் விழுகிறது.

ஆகவே $Q_3 = 20 + \frac{81-65}{16} \times 5$

$$= 20 + 5$$

$$= \mathbf{25}$$

கால்மானக் கோட்டக் கெழு காணும் சூத்திரம்

$$j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

ஆகவே $j = \frac{25 + 11{\cdot}667 - 2(17{\cdot}88)}{25 - 11{\cdot}667}$

$$= \frac{0{\cdot}907}{13{\cdot}333}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}068}$$

மாதிரி 243

A, *B* என்ற இரண்டு பிரிவுகளிலிருந்து, கணக்கிட்டு அறிந்த புள்ளி விவரங்கள் கீழ் வருமாறு :

விவரம்	*A*	*B*
இடைநிலை	19·64	24·46
முதல் கால்மானம்	13.46	15·64
மூன்றும் கால்மானம்	25·94	37·74

A, *B*, பிரிவுகளின் விலக்கம் கோட்டம் பற்றி ஒப்பிட்டுக் கூறு.

(திருவனந்தபுரம் பல்கலை)

பிரிவு *A*

கால்மான விலக்கம் $Q.D = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{25{\cdot}94 - 19{\cdot}64}{2}$$

$$= 3{\cdot}15$$

கால்மானக் கோட்டக் கெழு $j = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{25\ 94 + 13{\cdot}46 - 2(19{\cdot}64)}{25{\cdot}94 - 13\ 46}$$

$$= \frac{0{\cdot}12}{12{\cdot}48}$$

$$= 0.0096$$

பிரிவு *B*

கால்மான விலக்கம் $Q.D. = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{37{\cdot}76 - 15{\cdot}64}{2}$$

$$= 11{\cdot}06$$

காலமானக் கொட்டக் கெழு $j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{37{\cdot}76 + 15{\cdot}64 - 2(24{\cdot}46)}{37{\cdot}76 - 15{\cdot}64}$$

$$= \frac{4{\cdot}48}{22{\cdot}12}$$

$$= 0{\cdot}2$$

பிரிவு A, B-க்களை ஒப்பிட, பிரிவு B அதிக விலக்கமும் கோட்டமும் உடையதாக இருப்பது காண்கின்றோம்.

மாதிரி 244

கீழ்க் காணும் பட்டியல், நகரங்கள் அ, ஆ என்பனவற்றின் மக்கள் தொகையின், வயதுப் பிரிவுப் பரவல்களைத் தருகிறது. இரு கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழுக்களையும் கணக்கிட்டு, இவ்விரு பரவல்களின் அலைவெண்களின் கோட்டங்களை ஒப்பிடுக.

வயதுப் பிரிவு	மக்கள் தொகை (ஆயிரத்தில்)	
	நகர் அ	நகர் ஆ
0—10	10	10
10—20	12	12
20—30	24	18
30—40	32	25
40—50	29	16
50—60	11	14
60—70	3	8
70—80	1	0

தீர்வு :

வயதுப் பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	ஊகச்சராசரி $A=35$ யிலிருந்து விலக்கம் d'	நகர் அ				நகர் ஆ			
			f	fd'	fd'^2	குவி அலைவெண் cf	f	fd'	fd'^2	குவி அலைவெண் cf
0—10	5	—3	10	—30	90	10	10	—30	90	10
10—20	15	—2	12	—24	48	22	12	—24	48	22
20—30	25	—1	24	—24	24	46	18	—18	18	40
30—40	35	0	32	0	0	78	25	0	0	65
40—50	45	1	29	29	29	107	16	16	16	81
50—60	55	2	11	22	44	118	14	28	56	95
60—70	65	3	3	9	27	121	8	24	72	103
70—80	75	4	1	4	16	122	0	0	0	103
மொத்தம்			122	—14	278		103	—4	300	

நகர் அ :

மக்கள் தொகையின் கூட்டுச் சராசரி வயது

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d'}{n} \times C$$

$$= 35 + \frac{-14}{122} \times 10$$

$$= 33{\cdot}9 \text{ ஆண்டுகள்}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \left\{ \frac{\Sigma f d'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f d'}{\Sigma f} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times C$

$$= \left\{ \frac{278}{122} - \left(\frac{14}{122} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times C$$

$$= 15 \text{ ஆண்டுகள்}$$

முகடு $M_o = 30 + \frac{32-24}{64-24-29} (40-30)$

$$= 37{\cdot}3$$

முதல் கால்மானம் $Q_1 = 20 + \frac{\left(\frac{123}{4} - 22 \right)}{24} \times 10$

$$= 23{\cdot}54$$

இடைநிலை $M_e = 30 + \frac{\left(\frac{123}{2} - 46 \right)}{32} \times 10$

$$= 34{\cdot}84 \text{ ஆண்டுகள்}$$

மூன்றும் கால்மானம் $Q_3 = 40 + \frac{92{\cdot}25 - 78}{29} \times 10$

$$= 44{\cdot}91$$

கார்ல் பியர்சனின் முதல் கோட்ட அளவைக் கெழு

$$= \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$= \frac{33{\cdot}9 - 37{\cdot}6}{15}$$

$= -0{\cdot}25$ (தோராயமாக)

கார்ல் பியர்சனின் இரண்டாம் கோட்ட அளவைக் கெழு

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{44{\cdot}91 + 23{\cdot}54 - 2(34{\cdot}84)}{44{\cdot}91 - 23{\cdot}54}$$

$= 0{\cdot}06$ (தோராயமாக)

நகர் ஆ :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \frac{\Sigma f d'}{n} \times C$

$$= 35 + \frac{-4}{103} + 10$$

$= 34{\cdot}61$ ஆண்டுகள்

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \left\{ \frac{\Sigma f d'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f d'}{\Sigma f} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times C$

$$= \left\{ \frac{300}{103} - \left(\frac{-4}{103} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times 10$$

$= 17$ ஆண்டுகள்

முகடு $M_0 = 30 + \frac{25-18}{50-18-16} \times 10$

$= 34{\cdot}4$

இடை நிலை $M_e = 30 + \frac{52-40}{25} \times 10$

$= 34{\cdot}4$

முதல் கால்மானம் $Q_1 = 20 + \frac{\left(\frac{104}{4} - 22 \right)}{18} \times 10$

$= 22{\cdot}2$

மூன்றும் கால்மானம் $Q_3 = 40 + \frac{78-65}{16} \times 10$

$= 48 \cdot 1$

கார்ல் பியர்சனின் முதல் கோட்ட அளவைக் கெழு

$$= \frac{\bar{x}-M_o}{\sigma}$$

$$= \frac{34 \cdot 6 - 34 \cdot 4}{17}$$

$$= 0 \cdot 01$$

கார்ல் பியர்சனின் இரண்டாம் கோட்ட அளவைக் கெழு

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{48 \cdot 1 + 22 \cdot 2 - 2 \times 34 \cdot 4}{48 \cdot 1 - 22 \cdot 2}$$

$$= 0 \cdot 05$$

மாதிரி 245

கீழே தரப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்குக் கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
0—க்கு மேல்	150
10 ,, ,,	140
20 ,, ,,	100
30 ,, ,,	80
40 ,, ,,	80
50 ,, ,,	70
60 ,, ,,	30
70 ,, ,,	14
80 ,, ,,	0

(எம்.ஏ.—ராஜஸ்தான்—1959)

தீர்வு :

மதிப்பெண் பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	மாணவர் எண்ணிக்கை f	d_x' $\left(=\frac{x-45}{10}\right)$	fd_x'	$fd_x'^2$	குவி அலைவெண் $c.f$
0—10	5	10	—4	— 40	160	10
10—20	15	40	—3	—120	360	50
20—30	25	20	—2	— 40	80	70
30—40	35	0	—1	0	0	70
40—50	45	10	0	0	0	80
50—60	55	40	1	40	40	120
60—70	65	16	2	32	64	136
70—80	75	14	3	42	126	150
மொத்தம்		150		—86	830	

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d_x'}{n} \times C$

$= 45 + \frac{-86}{150} \times 10$

$= 39 \cdot 3$ மதிப்பெண்கள்.

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \left\{ \frac{830}{150} - \left(\frac{-86}{150}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times 10$

$= \sqrt{5 \cdot 2051} \times 10$

$= 22 \cdot 85$ மதிப்பெண்கள்.

மூன்றுவது பத்தியில், இரண்டு அலைவெண்கள் கூடிய ஒரே மதிப்பைக் கொண்டுள்ளது. ஆதலால் இங்கு முகட்டின் மதிப்பைக் கீழ்க் காணும் சூத்திரத்தின் மூலம் கணக்கிட வேண்டும்.

முகடு M_o = 3 இடைநிலை — 2 கூட்டுச் சராசரி

இடைநிலை $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது $\left(\frac{150+1}{2}\right)$ ஆவது அல்லது 75·5 ஆவது உறுப்பின் மதிப்பாகும்.

75·5 ஆவது உறுப்பு 40—50 என்ற பிரிவினிடையே விழுகிறது.

$$\text{இடைநிலை } M_e = 40 + \frac{75\cdot5-70}{10} \times 10$$

$$= 40 + 5\cdot5$$

$$= 45\cdot5 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

$$\text{ஆகவே, முகடு } M_o = 3 \times 45\cdot5 - 2 \times 39\cdot3$$

$$= 57\cdot9 \text{ மதிப்பெண்கள்}$$

$$\text{கோட்டக் கெழு } j = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி}-\text{முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$= \frac{39\cdot3-57\cdot9}{22\cdot8}$$

$$= \frac{-18\cdot6}{22\cdot8}$$

$$= -0\cdot82$$

மாதிரி 246

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கோட்டக் கெழுவைக் காண்.

வருமானம் (ரூபாயில்)	ஆட்கள் எண்ணிக்கை
0– க்கு மேல் 9 —க்குக் கீழ்	20
10 ” ” 19 ” ”	30
20 ” ” 29 ” ”	40
30 ” ” 39 ” ”	45
40 ” ” 49 ” ”	35
50 ” ” 59 ” ”	25
60 ” ” 69 ” ”	12

தீர்வு :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	அலை வெண் f	ஊகச் சராசரி $A = 34{\cdot}5$ யிலிருந்து விலக்கம் d'	fd'	fd'^2	குவி அலைவெண் $c.f$
0 – 9	45	20	–3	–60	180	20
10–19	14·5	30	–2	–60	120	50
20–29	24·5	40	–1	–40	40	90
30–39	34·5	45	0	0	0	135
40–49	44·5	35	1	35	35	170
50–59	54·5	25	2	50	100	195
60–69	64·5	12	3	36	108	207
மொத்தம்		207		–39	583	

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \times C$

$= 34{\cdot}5 + \frac{-39}{207} \times 10$

$=$ ரூ. 32·6 (தோராயமாக)

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \left\{ \frac{\Sigma fd'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times C$

$= \left\{ \frac{583}{207} - \left(\frac{-39}{207} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \times 10$

$=$ ரூ. 17 (தோராயமாக)

கூடுதலான அலைவெண் 45 என்பது 30—39 என்ற பிரிவில் விழுகிறது.

$$\text{ஆகவே, முகடு } M_o = 30 + \frac{45-40}{90-40-35} \times (39-30)$$

$$= 30 + \frac{5}{15} \times 9$$

$$= 30 + \frac{45}{15}$$

$$= \text{ரூ. } 33$$

$$\text{கோட்டக் கெழு } j = \frac{\text{கூட்டுச் சராசரி—முகடு}}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$$

$$= \frac{32{\cdot}6-33}{17}$$

$$= \frac{-0{\cdot}4}{17}$$

$$= -0{\cdot}023 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி 247

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்கு (1) கூட்டுச் சராசரிச் சம்பளம் (2) கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்.

ஒருவருக்கு	ரூ.	4·5	வீதம்	சம்பளம் பெறுவோர்	எண்ணிக்கை	35
,,	,,	5·5	,,	,,	,,	40
,,	,,	6·5	,,	,,	,	48
,,	,,	7·5	,,	,,	,,	100
,,	,,	8·5	,,	,.	,,	125
,,	.,	9·5	,,	,,	,,	87
,,	,,	10·5	,,	,,	,,	43
,,	,,	11·5	,,	,,	,,	22

(எம்.ஏ.—ஆக்ரா—1959)

தீர்வு ;

கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடல் :

சம்பளம் (ரூபாயில்) (x)	மனிதர்கள் எண்ணிக்கை (f)	ஊகச் சராசரி $A = 7{\cdot}5$ யிலிருந்து விலக்கம் (dx)	d_x^2	fd_x	fd_x^2
4·5	35	−3	9	−105	315
5·5	40	−2	4	− 80	160
6·5	48	−1	1	− 48	48
7·5	100	0	0	0	0
8·5	125	1	1	125	125
9·5	87	2	4	174	348
10 5	43	3	9	129	387
11 5	22	4	16	88	352
மொத்தம்	500			283	1735

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma fd_x}{n}$

$$= 7{\cdot}5 + \frac{283}{500}$$

$$= 8{\cdot}066$$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd_x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd_x}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1735}{500} - \left(\frac{283}{500}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3 \cdot 15}$$

$$= 1 \cdot 77 \text{ (தோராயமாக)}$$

முகடு

அதிக அலைவெண் கொண்ட உறுப்பே முகடாகும்.

ஆகவே $M_o = 8 \cdot 5$

கோட்டக் கெழு

$$j = \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$$

$$= \frac{8 \cdot 066 - 8 \cdot 5}{1 \cdot 77}$$

$$= -\frac{0 \cdot 434}{1 \cdot 770}$$

$$= -0 \cdot 245$$

மாதிரி 248

கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்குக் கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடவும்.

முதல் குழந்தை பிறக்கும்பொழுது வயது	13	14	15	16	17	18	19
மணமாகிய பெண்களின் எண்ணிக்கை	37	162	343	390	256	433	161
முதல் குழந்தை பிறக்கும்பொழுது வயது	20	21	22	23	24	25	
மணமாகிய பெண்களின் எண்ணிக்கை	355	65	85	49	46	40	

(எம்.ஏ.— ராஜஸ்தான்—1955)

தீர்வு :

முதல் குழந்தை பிறக்கும் பொழுது வயது (x)	மணமாகிய பெண்களின் எண்ணிக்கை (f)	fx	விலக்கம் d_x $(= x-18)$	d_x^2	fd_x^2
13	37	481	−5	25	925
14	162	2168	−4	16	2592
15	343	5145	−3	9	3087
16	390	6240	−2	4	1560
17	256	4352	−1	1	256
18	433	7794	0	0	0
19	161	3059	1	1	161
20	355	7100	2	4	1420
21	65	1365	3	9	585
22	85	1870	4	16	1360
23	49	1127	5	25	1225
24	46	1104	6	36	1656
25	40	1000	7	49	1960
மொத்தம்	2422	42805			16787

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{n} = \dfrac{42805}{2422}$

$= 17{\cdot}6$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \left\{\dfrac{16787}{2422}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= 2{\cdot}6$ (தோராயமாக)

முகடு M_o = 18 (கண்டறியலாம்)

கோட்டக் கெழு $j = \frac{\bar{x}-M_o}{\sigma}$

$= \frac{17{\cdot}6-18}{2{\cdot}6}$

$= -0\ 15$ (தோராயமாக)

மாதிரி 249

கீழ்க் காணும் பட்டியல் ஐந்து வயதுப் பள்ளி செல்லும் மாணவர்களின் உயரங்களைத் தருகிறது. கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

உயரம் (அங்குலத்தில்)	எண்ணிக்கை	உயரம் (அங்குலத்தில்)	எண்ணிக்கை	உயரம் (அங்குலத்தில்)	எண்ணிக்கை
28	1	36	166	44	567
29	0	37	344	45	233
30	1	38	740	46	89
31	3	39	1167	47	27
32	8	40	1670	48	19
33	13	41	1614	49	4
34	40	42	1541	50	4
35	59	43	1028	51	1

(எம். ஏ.— பம்பாய் பல்கலை)

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

உயரம் (அங்குலத்தில்) x	பையன்கள் எண்ணிக்கை f	ஊகச் சராசரி $A = 40$ யிலிருந்து விலக்கம் d_x	fd_x	fd_x^2
28	1	−12	− 12	144
29	0	−11	0	0
30	1	−10	− 10	100
31	3	− 9	− 27	243
32	8	− 8	− 64	512
33	13	− 7	− 91	637
34	40	− 6	− 240	1440
35	59	− 5	− 295	1475
36	166	− 4	− 664	2656
37	344	− 3	−1032	3096
38	740	− 2	−1480	2960
39	1167	− 1	−1167	1167
40	1670	0	0	0
41	1614	1	1614	1614
42	1541	2	3082	6164
43	1028	3	3084	9252
44	576	4	2268	9072
45	233	5	1165	5825
46	89	6	534	3204
47	27	7	189	1323
48	19	8	152	1216
49	4	9	36	324
50	4	10	40	400
51	1	11	11	121
மொத்தம்	9339		7093	52945

சராசரி உயரம் $\bar{x} = 40 + \frac{7093}{9339}$

$= 40{\cdot}75$ அங்குலம்

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{52945}{9339} - \left(\frac{7093}{9339}\right)^2}$

$= 2{\cdot}26$ அங்குலம்

பிரிவு சேர் முறையில் முகடு காணல் :

உயரம் (அங்குலத்தில்) x	அலைவெண் எண்ணிக்கை						கூடிய அலைவெண் பிரிவில் வரும் உயரங்களின் எண்ணிக்கை
	I	II	III	IV	V	IV	
28	1	1		2			0
29	0		1		4		0
30	1	4				12	0
31	3		11	24			0
32	8	21			61		0
33	13		53			112	0
34	40	99		265			0
35	59		225		569		0
36	166	510				1250	0
37	344		1084	2251			0
38	740	1907			3577		1
39	1167		2837			**4451**	4
40	1670	**3284**		**4825**			5
41	1614		**3155**		**4183**		3
42	1541	2569				3136	1
43	1028		1595	1828			0
44	567	800			889		0
45	233		322			349	0
46	89	116		135			0
47	27		46		50		0
48	19	23				27	0
49	4		8	9			0
50	4	5					0
51	1						0

ஆகவே முகடு M_o = 41 அங்குலம்

$$\text{கோட்டக் கெழு } j = \frac{\bar{x}-M_0}{\sigma}$$

$$= \frac{40{\cdot}75-41}{2{\cdot}26}$$

$$= -0{\cdot}106$$

மாதிரி 250

கீழ்க் காணும் பட்டியலில் தரப்பட்ட இரண்டு பரவல்களில் எப்பரவல் அதிகக் கோட்டமுடையது எனக் காட்டவும்.

பம்பாய் நகரின் வார வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் 1942		பம்பாய் நகரின் வார வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் 1943	
குறியீட்டெண்	வாரங்கள்	குறியீட்டெண்	வாரங்கள்
140—150	5	200—210	10
150—160	10	210—220	10
160—170	20	220—230	10
170—180	9	230—240	8
180—190	6	240—250	7
190—200	2	250—260	7

(எம். காம்.—ஆக்ரா—1950)

தீர்வு :

1942 ஆம் ஆண்டிற்கு :

கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் ;

குறியீட்டெண்	மத்திய மதிப்பு (x)	வாரங்கள் (f)	ஊகச் சராசரி (A 165) யிலிருந்து விலக்கம் d'	fd'	fd'^2
140—150	145	5	—2	—10	20
150—160	155	10	—1	—10	10
160—170	165	20	0	0	0
170—180	175	9	1	9	9
180—190	185	6	2	12	24
190—200	195	2	3	6	18
மொத்தம்		52		7	81

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times C$

$$= 165 + \frac{7}{52} \times 10$$

$$= 166 \cdot 34$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'}{\Sigma f}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{81}{52} - \left(\frac{7}{52}\right)^2} \times 10$$

$$= 12 \cdot 3$$

1943ஆம் ஆண்டிற்கு,

கூட்டுச் சராசரி, திட்ட விலக்கம் கணக்கிடல் :

குறியீட்டெண்	மத்திய மதிப்பு y	வாரங்கள் f	ஊகச் சராசரி $(B=225)$ யிலிருந்து விலக்கம் d_y'	fd_y'	$fd_y'^2$
200–210	205	10	–2	–20	40
210–220	215	10	–1	–10	10
220–230	225	10	0	0	0
230–240	235	8	1	8	8
240–250	245	7	2	14	82
250–260	255	7	3	21	36
மொத்தம்		52		3	149

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \frac{\Sigma f d_y'}{n} \times C$

$$= 225 + \frac{13}{52} \times 10$$

$$= \mathbf{227 \cdot 5}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d_y'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma f d_y'}{\Sigma f}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{149}{52} - \left(\frac{13}{52}\right)^2} \times 10$$

$$= \mathbf{16 \cdot 7}$$

1942 ஆம் ஆண்டின் முகட்டுப் பிரிவு 160—170 ஆகும்.

1943 ஆம் ஆண்டின் முகட்டுப் பிரிவை பிரிவுசேர் முறையில் காணலாம்.

குறியீட்டெண் பிரிவு	அலைவெண்						கூடுதலான அலைவெண் கொண்ட பிரிவில் அடங்கும் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை
	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	
200—210	10	20		30			3
210—220	10		20		28		5
220—230	10	18				25	5
230—240	8		15	22			2
240—250	7	14					1
250—260	7						0

இம் முறையில் 1943 ஆம் ஆண்டின் முகட்டுப் பிரிவைக் கண்டறிய இயலவில்லை. ஆகவே, கோட்டக் கெழுவைக் கணக்கிட்டறிய இடை நிலையைப் பயன்படுத்துவோம்.

1942—1943 ஆம் ஆண்டுகளின் இடைநிலையைக் கணக்கிடல் :

1942			1943		
பிரிவு	*f*	*c. f*	பிரிவு	*f*	*c. f*
140—150	5	5	200—210	10	10
150—160	10	15	210—220	10	20
160—170	20	35	220—230	10	30
170—180	9	44	230—240	8	38
180—190	6	50	240—250	7	45
190—200	2	52	250—260	7	52

1942 ஆம் ஆண்டின் இடைநிலை

$$M_e = l_1 + \frac{\left(\frac{N+1}{2}\right) - C}{f} \times h$$

$$= 160 + \frac{26-15}{20} \times 10$$

$$= 160 + \frac{11 \times 10}{20}$$

$$= \mathbf{165 \cdot 5}$$

1943 ஆம் ஆண்டின் இடைநிலை

$$M_e = 220 + \frac{26-20}{10} \times 10$$

$$= 220 + 6$$

$$= \mathbf{226}$$

1942 ஆம் ஆண்டின் கோட்டக் கெழு

$$j = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\sigma}$$

$$= \frac{3(166 \cdot 3 - 165 \cdot 5)}{12 \cdot 3}$$

$$= \frac{3 \times 0 \cdot 8}{12 \cdot 3}$$

$$= \mathbf{0 \cdot 19}$$

1943 ஆம் ஆண்டின் கோட்டக் கெழு

$$j = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\sigma}$$

$$= \frac{3(227 \cdot 5 - 226)}{16 \cdot 7}$$

$$= \frac{3 \times 1 \cdot 5}{16 \cdot 7}$$

$$= \mathbf{0 \cdot 27}$$

ஆகவே 1943 ஆம் ஆண்டின் கோட்ட அளவு, 1942 ஆம் ஆண்டை விட அதிகமாக இருக்கிறது என அறிகிறோம்.

மாதிரி 251

கீழ்க் காணும் பட்டியல் கல்லூரித் தேர்வு, போட்டித் தேர்வு ஆகியவற்றில் சில மாணவர் வாங்கிய மதிப்பெண்களின் பரவல்களைத் தருகிறது. அறிவில் எப்பிரிவு அதிக ஒருபடித்தானதாக இருக்கிறது ; எப்பிரிவு அதிகக் கோட்டமுடையதாக இருக்கிறது எனக் காட்டுக.

கல்லூரித் தேர்வு		போட்டித் தேர்வு	
மதிப்பெண்கள்	மாணவர் எண்ணிக்கை	மதிப் பெண்கள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
100–150	20	1200–1250	50
150–200	45	1250–1300	85
200–250	50	1300–1350	72
250–300	25	1350–1400	60
300–350	19	1400–1450	16

(பி.காம்.—திருவனந்தபுரம்—1948)

தீர்வு :

மாறு விகிதக் கெழுவையும், கோட்டக் கெழுவையும் கணக்கிடல் :

கல்லூரித் தேர்வு :

மதிப்பெண்கள்	மத்திய மதிப்பு	அலைவெண்	ஊகச்சராசரி ($A=225$) யிலிருந்து படிவிலக்கம்	fd_x'	$fd_x'^2$
100–150	125	20	–2	–40	80
150–200	175	45	–1	–45	45
200–250	225	50	0	0	0
250–300	275	25	1	25	25
300–350	325	19	2	38	76
மொத்தம்		159		–22	226

கல்லூரித் தேர்வு :

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d_x'}{n} \times C$

$= 225 + \frac{-22}{159} \times 50$

$=$ **218·07** மதிப்பெண்கள்

முகடு $M_o = l_1 + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_2 - f_1} \times C$

$= 200 + \frac{50-45}{100-45-25} \times 50$

$= 200 + 8{\cdot}33$

$=$ **208·33** மதிப்பெண்கள்

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d_x'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f d_x'}{n}\right)^2} \times C$

$= \sqrt{\frac{226}{159} - \left(\frac{-22}{159}\right)^2} \times 50$

$=$ **59·2** மதிப்பெண்கள்

மாறுவிகிதக் கெழு $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$= \frac{59{\cdot}2}{218{\cdot}07} \times 100$

$=$ **27·1** %

கோட்டக் கெழு $j = \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$

$= \frac{218{\cdot}07 - 208{\cdot}33}{59{\cdot}2}$

$= \frac{9{\cdot}74}{59{\cdot}2}$

$=$ **0·165**

போட்டித் தேர்வு :

மதிப் பெண்கள்	மத்திய மதிப்பு y	அலை வெண் f	ஊகச் சராசரி $(B=1325)$ யிலிருந்து படி விலக்கம் d_y'	fd_y'	$fd_y'^2$
1200—1250	1225	50	−2	—100	200
1250—1300	1275	85	−1	— 85	85
1300—1350	1325	72	0	0	0
1350—1400	1375	60	1	60	60
1400—1450	1425	16	2	32	64
மொத்தம்		283		—93	409

கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \frac{\Sigma f d_y'}{n} \times C$

$$= 1325 + \frac{-93}{283} \times 50$$

$= \mathbf{1308 \cdot 57}$ **மதிப்பெண்கள்.**

முகடு $\quad M_o = l_1 + \frac{f_m - f_1}{f_m - f_1 - f_2} \times C$

$$= 1250 + \frac{85-50}{170-50-72} \times 50$$

$$= 1250 + 36 \cdot 45$$

$= \mathbf{1286 \cdot 45}$ **மதிப்பெண்கள்**

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d_y'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f d_y'}{n}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{409}{283} - \left(\frac{-93}{283}\right)} \times 50$$

$= \mathbf{57\ 8}$ **மதிப்பெண்கள்**

$$\text{மாறு விகிதக் கெழு } C.V = \frac{\sigma}{\bar{y}} \times 100$$

$$= \frac{57 \cdot 8}{1308 \cdot 57} \times 100$$

$$= 4 \cdot 42\%$$

$$\text{கோட்டக்கெழு } j = \frac{\bar{y} - M_o}{\sigma}$$

$$= \frac{1308 \cdot 57 - 1286 \cdot 45}{57 \cdot 8}$$

$$= \frac{22 \cdot 12}{57 \cdot 8}$$

$$= \mathbf{0 \cdot 383}$$

முடிவு

கல்லூரி, போட்டித் தேர்வுகளில் முறையே மாறு விகிதக் கெழுக்கள் 27·1%, 4·42% என இருப்பதால், போட்டித் தேர்வு மதிப்பெண்கள் ஒருபடித்தானதாக இருக்கக் காண்கிறோம்.

கல்லூரித் தேர்வு, போட்டித் தேர்வு ஆகியவற்றில் முறையே கோட்டக் கெழுக்கள் 0·165, 0·383 என இருப்பதால், போட்டித் தேர்வு மதிப்பெண்கள் அதிகக் கோட்டமுடையதாக இருக்கக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 252

(a) ஒரு பரவலின் கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு 0·32 எனவும், திட்ட விலக்கம் 65 எனவும், கூட்டுச் சராசரி 29·6 எனவும் இருப்பின்,

(i) முகடு

(ii) இடைநிலை

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(b) மேற்கண்ட பரவலின் முகடு 24·8 என இருப்பின், அதன் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

(பி. காம்.—டெல்லி—1960)

தீர்வு :

(a) கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு $(j) = \dfrac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$

இங்கு,

$\bar{x}$ = கூட்டுச் சராசரி

M_o = முகடு

σ = திட்ட விலக்கம் என்பனவாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட கணக்கில்

$\bar{x} = 29{\cdot}6$; $\sigma = 6{\cdot}5$; $j = 0{\cdot}32$.

ஆகவே, $0{\cdot}32 = \dfrac{29{\cdot}6 - M_o}{6{\cdot}5}$

ie $0{\cdot}32 \times 6{\cdot}5$ = $29{\cdot}6$—முகடு

ie முகடு = $29{\cdot}6 - 2{\cdot}08$

முகடு M_o = **27·52**

முகட்டு மதிப்பைக் காண இயலாது போயின் கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு காண உதவும் சூத்திரம்

j = $\dfrac{3\,(\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{திட்ட விலக்கம்}}$

கணக்கின்படி,

$0{\cdot}32 = \dfrac{3\,(29{\cdot}6 - \text{இடைநிலை})}{6{\cdot}5}$

அல்லது $0{\cdot}32 \times 65$ = $3\,(29{\cdot}6 - \text{இடைநிலை})$

அல்லது $2{\cdot}08$ = $88{\cdot}8$ – 3 இடைநிலை

அல்லது 3 இடைநிலை = $88{\cdot}8 - 2{\cdot}08$

= $86{\cdot}72$

ஆகவே இடைநிலை = **28·91**

(b) இங்கு, கோட்டக் கெழு = 0 32

முகடு = 24 8

கூட்டுச் சராசரி = 29·6

கோட்டக் கெழு $j = \dfrac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$

ஆகவே $0{\cdot}32 = \dfrac{29{\cdot}6 - 24{\cdot}8}{\sigma}$

அல்லது $0{\cdot}32\sigma = 4{\cdot}8$

ஆகவே $\sigma = \dfrac{4{\cdot}8}{0{\cdot}32} = 15$

திட்ட விலக்கம் $= 15$

மூமென்ட்ஃச்களும், தட்டையளவுகளும்

மாதிரி 253

கீழ்க் காணும் எண்களுக்கு முதல் நான்கு மூமென்ட்ஃச்களைக் கணக்கிடவும்.

5, 8, 12, 14 16.

தீர்வு :

(i) முதல் மூமென்ட்ஃச் அல்லது கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{5+8+12+14+16}{5} = \frac{55}{5}$$

$$= 11$$

(ii) இரண்டாம் மூமென்ட்ஃச்

$$= \frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{5^2+8^2+12^2+14^2+16^2}{5}$$

$$= \frac{25+64+144+196+256}{5}$$

$$= \frac{685}{5} = 137$$

(iii) மூன்றும் மூமென்ட்ஃச்

$$= \frac{\Sigma x^3}{n} = \frac{5^3+8^3+12^3+14^3+16^3}{5}$$

$$= \frac{125+512+1728+2744+4096}{5}$$

$$= \frac{9205}{5} = 1841$$

(iv) நான்காம் மூமென்ட்டைச்

$$= \frac{\Sigma x^4}{n} = 5^4+8^4+12^4+14^4+16^4$$

$$= \frac{625+4096+20736+38416+65536}{5}$$

$$= \frac{129409}{5} = 25881 \cdot 8$$

மாதிரி 254

கீழ்க்காணும் அலைவெண் பரவலின் தட்டையளவைக் கணக்கிட்டு விவரி.

பிரிவு	5—6	6—	7—	8—	9—	10—	11—	12—	13—14
அலைவெண்	3	30	110	218	275	222	108	32	1

பிரிவு x	அலைவெண் f	குவி அலைவெண் $c.f$
5— 6	3	3
6— 7	30	33
7— 8	110	143
8— 9	218	361
9—10	275	636
10—11	222	858
11—12	108	966
12—13	32	998
13—14	1	999

முதல் கால்மானம் $Q_1 = 8 + \frac{250-143}{218} \times 1$

$= 8.5$

மூன்றும் கால்மானம் $Q_3 = 10 + \frac{750-636}{222} \times 1$

$= 10.5$

பத்தாம் நூற்றுமானம் $P_{10} = 7 + \frac{100-33}{110} \times 1$

$= 7.6$

தொண்ணூறும் நூற்றுமானம் $P_{90} = 11 + \frac{900-858}{108} \times 1$

$= 11.4$

கால்மான விலக்கம் $Q \cdot D = \frac{10.5-8.5}{2} = 1$

கால்மானத் தட்டை அளவை $= \frac{11.4-7.6}{1} = 3.8$

இவ் வளைகோடு மெசோகர்ட்டிக் வகையை, இயல்நிலை வளைகோடு போல் சேரும்.

மாதிரி 255

கீழ்க்காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு வேறுபட்ட முறையில் கணக்கிடப்படும் கோட்ட அளவைகளைக் கணக்கிடவும்.

பின்பு கர்டாசிஸ் அளவைகளையும் காணவும்.

x	3–7	8–12	13–17	18–22	23–27	28–32	33–37	38–42
f	2	108	580	175	80	32	18	5

(சென்னை—பல்கலை)

தீர்வு :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	f	d_x	fd_x	fd_x^2	fd_x^3	fd_x^4	திரள் அலை வெண் $c.f$
3—7	5	2	—2	—4	8	—16	32	2
8—12	10	108	—1	108	—108	—108	108	110
13—17	15	580	0	0	0	0	0	690
18—22	20	175	1	175	175	175	175	865
23—27	25	80	2	160	320	640	1280	945
28—32	30	32	3	96	288	864	2592	977
33—37	35	18	4	72	288	1152	4608	995
38—42	40	5	5	25	125	625	3125	1000
மொத்தம்		1000		416	1312	3332	11920	

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d_x}{n} \times C$

$$= 15 + \frac{416}{1000} \times 5$$

$$= 17{\cdot}08$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d_x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f d_x}{n}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{1312}{1000} - \left(\frac{416}{1000}\right)^2} \times 5$$

$$= 5{\cdot}295$$

முதல் கால்மானம் $Q_1 = 12{\cdot}5 + \frac{250—110}{580} \times 5$

$$= \mathbf{13{\cdot}707}$$

இடைநிலை $M_e = 12{\cdot}5 + \frac{500—110}{580} \times 5$

$$= \mathbf{15{\cdot}862}$$

மூன்றும் கால்மானம் Q_3 $= 17{\cdot}5 + \frac{70-690}{175} \times 5$

$= \mathbf{19{\cdot}214}$

மூன்றும் மத்திய மூமென்ட்ஃச்

$$\mu_3 = \mu_3' - 3d\,\mu_2' + 2d^3$$

$$= \frac{3332}{1000} \times 125 - 3 \times 2{\cdot}08 \times \frac{1312}{1000} \times 25 + 2 \times (2{\cdot}08)^3$$

$$= \mathbf{229{\cdot}826}$$

(1) கார்ல் பியர்சனின் கோட்டக் கெழு $= \frac{3(\bar{x}-M_e)}{\sigma}$

$$= \frac{3(17{\cdot}08-15{\cdot}862)}{5{\cdot}295}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}69}$$

(2) கால்மானக் கோட்டக் கெழு அளவை $= \frac{Q_3+Q_1-2M_e}{Q_3-Q_1}$

$$= \frac{19{\cdot}214+13{\cdot}707-2(15{\cdot}862)}{19{\cdot}214-13{\cdot}707}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}22}$$

(3) மூன்றும் மூமென்ட்ஃச் மூலம் காணும் கோட்டக் கெழு

$$\sqrt[3]{\frac{229{\cdot}826}{5{\cdot}295}}$$

$$= \mathbf{1{\cdot}157}$$

தட்டையளவைக் (கர்டாசிஃச்) கணக்கிடல்:

$$\mu_4 = V_4 - 4V_1V_3 + 6V_1^2V_2 - 3V_1^4$$

$$= 11{\cdot}92 - 4(0{\cdot}416)(3{\cdot}332) + 6(0{\cdot}416)^2(1{\cdot}312) - 3(0{\cdot}416)^4$$

$$= 11{\cdot}92 - 5{\cdot}54 + 1{\cdot}36 - 0{\cdot}09$$

$$= \mathbf{7{\cdot}65}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^2} = \frac{7{\cdot}65}{(1{\cdot}119)^2}$$

$$= \frac{7{\cdot}65}{1{\cdot}25} = \mathbf{6{\cdot}1}$$

இங்கு, $\beta_2 > 3$

ஆகவே இவ்வலைவெண் பரவலின் வளைகோடு 'லெப்டோகர்டிக்' வகையைச் சார்ந்தது எனக் கொள்கிறோம்.

மாதிரி 256

கீழ்க் காணும் அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட முதல் நான்கு மூமென்ட்ஃச்களைக் கணக்கிடவும்.

x	1	2	3	4	5
f	5	8	10	9	6

தீர்வு :

மூமென்ட்ஃச்கள் கணக்கிடல் :

x	f	d_x	fd_x	fd_x^2	fd_x^3	fd_x^4
1	5	−2	−10	20	−40	80
2	8	−1	− 8	8	− 8	8
3	10	0	0	0	0	0
4	9	1	9	9	9	9
5	6	2	12	24	48	96
மொத்தம்	38		3	61	9	193

இங்கு,

$$V_1 = \frac{3}{38}$$

$$V_2 = \frac{61}{38}$$

$$V_3 = \frac{9}{38}$$

$$V_4 = \frac{193}{38}$$

ஆகவே,

$$\mu_1 = V_1 - V_1 = \frac{3}{38} - \frac{3}{38} = 0$$

$$\mu_2 = V_2 - V_1^2$$

$$= \frac{61}{38} - \left(\frac{3}{38}\right)^2$$

$$= 1{\cdot}6$$

$$\mu_3 = V_3 - 3V_1V_2 + 2V_1^3$$

$$= \frac{9}{38} - \left(\frac{3\times3\times61}{38\times38}\right) + 2\left(\frac{3}{38}\right)^3$$

$$= 0{\cdot}237 - 0{\cdot}38 + 0{\cdot}001$$

$$= -0{\cdot}142$$

$$\mu_4 = V_4 - 4V_3V_1 + 6V_2V_1^2 - 3V_1^4$$

$$= \frac{193}{38} - 4\left(\frac{9}{38}\right)\left(\frac{3}{38}\right) + 6\left(\frac{61}{38}\right)\left(\frac{3}{38}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{38}\right)^4$$

$$= 5{\cdot}1 - 0{\cdot}074 + 0{\cdot}617 - 0{\cdot}000$$

$$= 5{\cdot}643$$

மாதிரி 257

பின்வரும் பட்டியல் 82 குடும்பங்கள் செலுத்தும் மாத வாடகையின் அலைவெண் பரவலைத் தருகிறது. தட்டை அளவைக் கணக்கிடவும்.

மாத வாடகை (ரூபாயில்)	10—20	20—30	30—40	40—50
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	2	1	2	6
மாத வாடகை (ரூபாயில்)	50—60	60—70	70—80	80—90
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	16	27	16	7
மாத வாடகை (ரூபாயில்)	90—100	100—110	110—120	மொத்தம்
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	3	1	1	82

(*Dr*. பி. என். குப்தா—பக்கம் 330)

தீர்வு :

பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x	அலை வெண் f	$A=65$ -லிருந்து படி விலக்கம் d_x	fd_x	fd_x^2	fd_x^3	fd_x^4
10—20	15	2	—5	—10	50	—250	1250
20—30	25	1	—4	— 4	16	— 64	256
30—40	35	2	—3	— 6	18	— 54	162
40—50	45	6	—2	—12	24	— 48	96
50—60	55	16	—1	—16	16	— 16	16
60—70	65	27	0	0	0	0	0
70—80	75	16	1	16	16	16	16
80—90	85	7	2	14	28	56	112
90—100	95	3	3	9	27	81	243
100—110	105	1	4	4	16	64	256
110—120	115	1	5	5	25	125	625
மொத்தம்		82		0	236	—90	3032

ஊகச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட முதல் மூமெண்ட்ஃச் $V_1 = \frac{\Sigma f d_x}{n} = \frac{0}{82} = 0$

ஊகச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட இரண்டாம் மூமெண்ட்ஃச் $V_2 = \frac{\Sigma f d_x^2}{n} = \frac{236}{82}$

$= 2{\cdot}8780$

ஊகச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மூன்றும் மூமெண்ட்ஃச் $V_3 = \frac{\Sigma f d_x^3}{n} = \frac{-90}{82}$

$= -1{\cdot}097$

ஊகச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட நான்காம் மூமெண்ட்ஃச் $V_4 = \frac{\Sigma f d_x^4}{n} = \frac{3032}{82}$

$= 36{\cdot}9756$

ஆகவே,

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட முதல் மூமெண்ட்ஃச் $\mu_1 = V_1 - V_1 = 0$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட இரண்டாம் மூமெண்ட்ஃச் $\mu_2 = V_2 - V_1^2$

$= 2{\cdot}8780 - (0)^2$

$= \mathbf{2{\cdot}8780}$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மூன்றும் மூமெண்டஃச்

$$\mu_3 = V_3 - 3V_1V_2 + 2V_1^3$$
$$= -1{\cdot}097 - 3(0) + 2(0)^3$$
$$= \mathbf{-1{\cdot}097}$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட நான்காம் மூமெண்ட்ஃச்

$$\mu_4 = V_4 - 4V_1V_3 + 6(V_1)^2V_2 - 3V_1^4$$
$$= 36{\cdot}9756 - 4(0)(-1{\cdot}097) + 6(0)^2(2{\cdot}8780) - 3(0)^4$$
$$= \mathbf{36{\cdot}9756}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

ஆகவே, $\beta_2 = \frac{36{\cdot}9756}{(2{\cdot}8780)^2}$

$= 4{\cdot}46$

கர்டாசிஸ்ச் நாலாவது மூமெண்ட்ஸ்ச்சின் அடிப்படையில் கணக்கிடப்படுகிறது. சமச் சீரான இயல்நிலைப் பரவலின் 4ஆவது மூமெண்ட்ஸ்ச்சின் அளவு 3-க்குச் சமம். எனவே 3-க்கு மேலுள்ள எச்சமே கர்டாசிஸ்ச்சின் அளவு ஆகும். கர்டாசிஸ்ச் என்பது 'K' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது.

$K = \beta_2 - 3$

இங்கு, $K = 4{\cdot}46 - 3$

$= 1{\cdot}46$

ஆகவே, இங்கு K என்பது 0-க்கு அதிகமாக இருக்கிறது. எனவே, இப் பரவலின் வளைகோட்டை லெப்டோகர்டிக் வகை எனக் கொள்கிறோம்.

மாதிரி 258

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கர்டாசிஸ்ச் காண்.

பிரிவு இடைவெளி	0—10	10—20	20—30	30—40
அலைவெண்	1	3	4	2

(எம். காம்.—ஆக்ரா—1951)

பிரிவு இடைவெளி	மத்திய மதிப்பு x	f	ஊகச்சராசரி ($A=25$) -லிருந்து விலக்கம் d_x	fd_x	fd_x^2	fd_x^3	fd_x^4
0—10	5	1	—2	—2	4	—8	16
10—20	15	3	—1	—3	3	—3	3
20—30	25	4	0	0	0	0	0
30—40	35	2	1	2	2	2	2
மொத்தம்		10		—3	9	—9	21

ஊகச் சராசரி $A=25$-லிருந்து கணக்கிடப்பட்ட மூமெண்ட்டுகள்

$$V_1 = \frac{\Sigma f d_x}{n} \times C$$

$$= \frac{-3}{10} \times C$$

$$= -3$$

$$V_2 = \frac{\Sigma f d_x^2}{n} \times C^2$$

$$= \frac{9}{10} \times (10)^2$$

$$= 90$$

$$V_3 = \frac{\Sigma f d_x^3}{n} \times C^3$$

$$= \frac{-9}{10} \times (10)^3$$

$$= -900$$

$$V_4 = \frac{\Sigma f d_x^4}{n} \times C^4$$

$$= \frac{21}{10} (10)^4$$

$$= 21{,}000$$

கர்டாசிஃச் கணக்கிடல் :

$$\mu_2 = V_2 - V_1^2$$

$$= 90-(-3)^2$$

$$= 81$$

$$\mu_4 = V_4 - 4V_3V_1 + 6V_2V_1^2 - 3V_1^4$$

$$= 21000-4(-900)(-3)+6(90)(-3)^2 - 3(-3)^4$$

$$= 21000-10800+4860-243$$

$$= 14{,}817$$

ஆகவே, K அல்லது $\beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$

$$= \frac{14817}{(81)^2} - 3 = \frac{14817}{6561} - 3$$

$$= 2{\cdot}258 - 3$$

$$= \mathbf{-0{\cdot}742}$$

இங்கு, $-0{\cdot}742 < 0$ என இருப்பதால், இப்பரவலின் வளை கோடானது பிளாடிகர்டிக் வகையைச் சேர்ந்ததாகும்.

மாதிரி 259

59″ இருந்து 73″ வரை ஓர் அலகை இடைவெளியாகக் கொண்ட 15 பிரிவு கொண்ட 346 ஐரிஸ் மனிதர்களின் உயரத்தின் அலைவெண் பரவலில், ஊகச் சராசரியாக 67″ கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட மூமெண்ட்ஃச்களின் மதிப்பு பின்வருமாறு :

$$\Sigma fx = 118 \; ; \quad \Sigma fx^2 = 1{,}668 \; ; \quad \Sigma fx^3 = 1{,}546$$

இவை கொண்டு கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட இரண்டாம், மூன்றும் மூமெண்ட்ஃச்களைக் கணக்கிடவும்.

(அண்ணாமலைப் பல்கலை.—1946)

தீர்வு :

$$V_1 = \mu'_1 = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{118}{346} = 0{\cdot}34$$

$$V_2 = \mu'_2 = \frac{\Sigma fx^2}{N} = \frac{1668}{346} = 4{\cdot}82$$

$$V_3 = \mu'_3 = \frac{\Sigma fx^3}{N} = \frac{1546}{346} = 4{\cdot}46$$

ஆகவே $\mu_2 = \sigma^2 = V_2 - V_1^2$

$$= 4{\cdot}82 - (0{\cdot}34)^2$$

$$= \mathbf{4{\cdot}7044}$$

$$\mu_3 = V_3 - 3V_2V_1 + 2V_1^3$$

$$= 4{\cdot}46 - 3 \times 0{\cdot}34 \times 4{\cdot}82 + 2 \times (0{\cdot}34)^3$$

$$= \mathbf{-0{\cdot}3778}$$

மாதிரி 260

கீழே தரப்பட்ட இரு பிரிவுகளுள் எப்பிரிவு அதிகச் சமச்சீர்ப் பரவலாக இருக்கிறது ?

(i) கூட்டுச் சராசரி = 22 ; இடைநிலை = 24 ;
திட்ட விலக்கம் = 10

(ii) கூட்டுச் சராசரி = 22 ; இடைநிலை = 25 ;
திட்ட விலக்கம் = 12

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1963)

தீர்வு :

(i) கோட்டக் கெழு $j = \frac{3(\bar{x}-M_e)}{\sigma}$

$= \frac{3(22-24)}{10}$

$= \frac{-6}{10}$

$= -0{\cdot}6$

(ii) கோட்டக் கெழு $j = \frac{3(\bar{x}-M_e)}{\sigma}$

$= \frac{3(22-25)}{12}$

$= -\frac{9}{12}$

$= -0{\cdot}75$

ஆகவே, முதல் பிரிவு அதிகச் சமச்சீராகவுள்ள பரவலாகும்.

மாதிரி 261

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரங்கள், ஒரு பொருளாதார நிபுணரிடம், பொருளாதாரப் பகுப்பாய்வு காணக் கொடுக்கப் பட்டன. இப் புள்ளிவிவரங்கள் குட்-இயர் டயர்களின் உழைப்புக் காலத்தின் அளவைகளாகும் :

$$n = 100,\ \Sigma f d_x = 50,\quad \Sigma f d_x^2 = 1967{\cdot}2$$
$$\Sigma f d_x^3 = 2925{\cdot}8,\ \Sigma f d_x^4 = 86650{\cdot}2$$

இப் புள்ளி விவரம் பிளாடிகர்டிக் எனக் காட்டு.

(B. B. குப்தா—பக். 331)

தீர்வு :

$$V_1 = \frac{\Sigma f d_x}{n} = \frac{50}{100} = 0{\cdot}5$$

$$V_2 = \frac{\Sigma f d_x^2}{n} = \frac{1967{\cdot}2}{100} = 19{\cdot}672$$

$$V_3 = \frac{\Sigma f d_x^3}{n} = \frac{2925{\cdot}8}{100} = 29{\cdot}258$$

$$V_4 = \frac{\Sigma f d_x^4}{n} = \frac{86650{\cdot}2}{100} = 866{\cdot}502$$

ஆகவே,

$$\mu_1 = V_1 - V_1 = 0$$

$$\mu_2 = V_2 - V_1^2$$
$$= 19{\cdot}672 - (0{\cdot}5)^2$$
$$= \mathbf{19 \cdot 422}$$

$$\mu_3 = V_3 - 3V_2V_1 + 2V_1^3$$
$$= 29{\cdot}258 - 3(0{\cdot}5)(19{\cdot}672) + 2(0{\cdot}5)^3$$
$$= 29{\cdot}258 - 29{\cdot}508 + 0{\cdot}25$$
$$= \mathbf{0}$$

$$\mu_4 = V_4 - 4V_3V_1 + 6V_2V_1^2 - 3V_1^4$$
$$= 866{\cdot}50 - 4(0{\cdot}5)(29{\cdot}258) + 6(19{\cdot}672)(0{\cdot}5)^2 - 3(0{\cdot}5)^4$$
$$= \mathbf{837{\cdot}304}$$

'K' அல்லது $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{837{\cdot}304}{(19{\cdot}422)^2}$

$= 2{\cdot}22$

இங்கு, $K < 3$

ஆகவே, இவ் வளைகோடு பிளாடிகர்டிக் வகையாகும்.

மாதிரி 262

இடைநிலை $= 24$; கூட்டுச்சராசரி $= 26$

என இருப்பின், இப்பிரிவு எதிர்மறைக் கோட்டமுடையதா அல்லது நேர் கோட்டமுடையதா ?

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1963)

தீர்வு :

$$\text{கோட்டக் கெழு } j = \frac{3(\bar{x}-M_e)}{\sigma} \text{ என்பது சூத்திரம்.}$$

கொடுக்கப்பட்ட கணக்கில் கூட்டுச் சராசரியின் (26) மதிப்பு இடைநிலையின் (24) மதிப்பைவிட அதிகமாக இருப்பதால் இங்குக் கோட்டக் கெழுவின் அளவை நேர்கோட்டமுடையது என அறியலாம்.

4. உடன் தொடர்பு அல்லது இடையுறவு
(Correlation)

கார்ல் பியர்சன் என்பவர் x, y என்ற இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகளுக்கிடையே உள்ள உடன் தொடர்பு கெழுவைக் கணக்கிட, கீழ்க் காணும் சூத்திரத்தைக் கையாளுகிறார் :

உடன் தொடர்பு கெழு $= r$

$$i.e., r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2) \times (\Sigma y'^2)}} = \frac{\Sigma x'y'}{n\sigma_x\sigma_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

மேற்கண்டவற்றில்,

x' = உண்மையான சராசரி $\bar{x}$-லிருந்து கிடைத்த விலக்கங்கள்

$= x - \bar{x}$

y' = உண்மையான சராசரி $\bar{y}$-லிருந்து கிடைத்த விலக்கங்கள்

$= y - \bar{y}$

σ_x, σ_y என்பன x, y என்ற மாறிகளின் வரிசைகளின் திட்ட விலக்கங்கள் (Standard deviation) ஆகும்.

$\bar{x}, \bar{y}$ -கள் முழு எண்களாக இல்லாமல் இருப்பின் மேற்கண்ட சூத்திரம் (1) சுலபமானதன்று. பின்பு கீழ்க்காணும் முறையில் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சூத்திரத்தை உபயோகிக்கிறோம்.

$$r = \frac{\Sigma xy - \frac{(\Sigma x)(\Sigma y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right] \times \left[\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right]}}$$

அல்லது
$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]\left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}} \quad \text{.........(2)}$$

மேற்கண்டவற்றில்,

d_x = X வரிசையின் ஊகச் சராசரியிலிருந்து உள்ள விலக்கம்.

d_y = Y வரிசையின் ஊகச் சராசரியிலிருந்து உள்ள விலக்கம்.

உடன் தொடர்பு அட்டவணையிலிருந்து உடன் தொடர்பு கீழ்க் காணும் சூத்திரத்தால் கணக்கிடப்படுகிறது.

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y - \frac{(\Sigma f d_x)(\Sigma f d_y)}{\Sigma f}}{\sqrt{\left[\Sigma f d_x^2 - \frac{(\Sigma f d_x)^2}{\Sigma f}\right] \times \left[\Sigma f d_y^2 - \frac{(\Sigma f d_y)^2}{\Sigma f}\right]}} \quad \text{..(3)}$$

குறிப்பு :

மேற்கண்ட (2), (3) ஆவது சூத்திரங்களில் d_x, d_y-களை முறையே $D_x\left(=\frac{d_x}{i}\right)$; $D_y\left(=\frac{d_y}{i'}\right)$ ஆக எடுத்துக்கொண்டு கணக்கெடுப்பினும் r-ன் மதிப்பு மாருது. இதனுல் d_x, d_y களை முறையே சாதாரண விலக்கங்களாகவோ, அல்லது சுருக்க விலக்கங்களாகவோ எடுத்துக் கொண்டாலும் சூத்திரங்கள் (2)-ம், (3)-ம் r-ன் மதிப்பை அப்படியே தருகின்றன என்பதைக் காணலாம்.

ஊகப் பிழை, நிகழ்பிழை (Probable Error)

உடன் தொடர்பின் ஊகப் பிழை

$$r = 0{\cdot}6745\ \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

மேற்கண்டவற்றில் n = கண்டறிந்த சேர்க்கை மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

வரிசைத் தொடர்பு (தரத் தொடர்பாடு)—Rank Correlation :

ஒரு நபரின் இரு குணங்களாகிய A, B-களின் தர வரிசைகளின் அளவுகளாக முறையே x, y என்ற இரு மாறிகளைக் கொள்வோம்.

பின் x, y மாறிகளின் உடன் தொடர் கெழுவை நாம் வரிசைத் தொடர்பு அல்லது தரத் தொடர்பாடு எனக் கூறுகிறோம். ஸ்பியர்மேன் என்பவர் தரத் தொடர்பாட்டைக் கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தால் கணக்கிடுகிறார்.

$$r = 1 - \frac{6(\Sigma d^2)}{n(n^2-1)}$$

மேற்கண்டவற்றில்,

$d = x - y$

n = நபர்களின் அல்லது கண்டறிந்தவைகளின் எண்ணிக்கை

கன்கரன்ட் விலக்கம் (Concurrent Deviation)

$$r = \pm \sqrt{\pm \left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

மேற்கண்டவற்றில்,

r = கன்கரன்ட் விலக்கம்

c = கன்கரன்ட் (ஒற்றுமைக் குறிகள் மாதிரியில் விளங்கும்)

n = கொடுத்த ஜோடி மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை

மாதிரி 263

கீழ்க்காணும் பட்டியல் தரும் தந்தை, மகன் உயர அளவுகளின் உடன் தொடர்பு கெழுவைக் கணக்கிடு.

தந்தையின் உயரம் (அங்குலத்தில்)	65	66	67	68	69	70	71
மகனின் உயரம் (அங்குலத்தில்)	67	68	66	69	72	72	69

தீர்வு :

உடன் தொடர்பு கெழுவைக் கணக்கிடல் :

வரிசை எண்	தந்தை உயரம் x	மகன் உயரம் y	உண்மையான சராசரி 68''-லிருந்து விலக்கம் x'	உண்மையான சராசரி 69''-லிருந்து விலக்கம் y'	விலக்கங்களின் பெருக்கல் $x' \times y'$	விலக்க வர்க்கம் x'^2	விலக்க வர்க்கம் y'^2
1	65	67	—3	—2	6	9	4
2	66	68	—2	—1	2	4	1
3	67	66	—1	—3	3	1	9
4	68	69	0	0	0	0	0
5	69	72	1	3	3	1	9
6	70	72	2	3	6	4	9
7	71	69	3	0	0	9	0
$n=7$	476	483	0	0	20	28	32

$\bar{x}$ – தந்தை உயரத்தின் சராசரி $= \frac{\Sigma x}{n}$

$= \frac{476}{7}$

$= 68''$

$\bar{y}$ = மகன் உயரத்தின் சராசரி $= \frac{\Sigma y}{n}$

$= \frac{483}{7}$

$= 69''$

கார்ல் பியர்சன் சூத்திரம் $r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)(\Sigma y'^2)}}$

மேற்கண்ட கணக்கின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டால்,

$$r = \frac{20}{\sqrt{28 \times 32}}$$

$= +\ 0{\cdot}67$ (தோராயமாக)

என அறிகிறோம்.

குறிப்பு : $\bar{x}, \bar{y}$ கள் முழு எண்களாக இருப்பதால் (1) ஆவது சூத்திரத்தை உபயோகப்படுத்தினோம்.

மாதிரி 264

10 ஜோடி கணவன் மனைவி ஆகியோரின் வயது விவரம் கீழ்க்காணும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது. உடன் தொடர்பு கெழுவைக் கணக்கிடுக.

கணவன் வயது x	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
மனைவி வயது y	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

தீர்வு :

கணவன் வயதுக்கும் மனைவி வயதுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு கெழுவைக் கணக்கிடல் :

கணவன் வயது x	மனைவி வயது y	30 இலிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்கங்களின் வர்க்கம் d_x^2	மனைவி வயது y	24 இலிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்கங்களின் வர்க்கம் d_y^2	விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x d_y$
23	18	−7	49	18	−6	36	42
27	22	−3	9	22	−4	16	6
28	23	−2	4	23	−1	1	2
29	24	−1	1	24	0	0	0
30	25	0	0	25	1	1	0
31	26	1	1	26	2	4	2
33	28	3	9	28	4	16	12
35	29	5	25	29	5	25	25
36	30	7	49	30	6	36	36
39	32	9	81	32	8	64	72
$n = 10$		11	215		17	187	197

சூத்திரம் $$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma dx)^2}{n}\right]\left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

$$r = \frac{197 - \frac{(11 \times 17)}{10}}{\sqrt{\left[215 - \frac{(11)^2}{10}\right]\left[187 - \frac{(17)^2}{10}\right]}}$$

$$= \frac{197 - 18{\cdot}7}{\sqrt{(215 - 12{\cdot}1)(187 - 28{\cdot}9)}}$$

$$= \frac{178 \cdot 3}{\sqrt{202 \cdot 9 \times 158 \cdot 1}}$$

$$= \frac{178 \cdot 3}{179}$$

$$= 0 \cdot 99 \text{ (தோராயமாக)}$$

கணவன் வயது, மனைவி வயது ஆகிய இரண்டுக்கும் இடையே மேற்கண்ட கணக்கில் உயர்ந்த அளவு நேரிடை உடன் தொடர்பு இருக்கிறது.

குறிப்பு : மேற்கண்ட கணக்கில் கூட்டுச் சராசரி முழு எண்ணாக இல்லை. ஊகச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்கள் உபயோகப்படுத்தப்பட்டு (2) ஆவது சுருக்கச் சூத்திரம் மூலம் இங்கு உடன்தொடர்பு கணக்கிடப்பட்டுள்ளது கவனிக்கவும்.

மாதிரி 265

ஒரு மாணவன் ஒரு வருடத்தில் 10 தேர்வுகளில் (கணக்கு, ஆங்கிலப் பாடங்களில்) எடுத்துள்ள மதிப்பெண்களின் பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. உடன் தொடர்பு கெழுவைக் கணக்கிடுக.

தேர்வு எண்	கணக்குத் தேர்வு	ஆங்கிலத் தேர்வு
1	77	35
2	54	58
3	27	60
4	52	40
5	14	50
6	35	40
7	90	35
8	25	56
9	56	34
10	60	42

தீர்வு : உடன் தொடர்பு கெழுவைக் கணக்கிடல் :

தேர்வு எண்	கணக்கு மதிப் பெண் கள் x	ஆங்கில மதிப் பெண் கள் y	உண்மையான சராசரி 49-லிருந்து விலக்கம் x'	உண்மையான சராசரி 45-லிருந்து விலக்கம் y'	விலக்கங்களின் பெருக்கல் $x'y'$	விலக்கங்களின் வர்க்கம் x'^2	விலக்கங் களின் வர்க் கம் y'^2
1	77	35	28	—10	—280	784	100
2	54	58	5	13	65	25	169
3	27	60	—22	15	—330	484	225
4	52	40	3	—5	—15	9	25
5	14	50	—35	5	—175	1225	25
6	35	40	—14	—5	70	196	25
7	90	35	41	—10	—410	1681	100
8	25	56	—24	11	—264	576	121
9	56	34	7	—11	—77	49	121
10	60	42	11	—3	—33	111	9
$n=10$	490	450	0	0	—1449	5150	920

$\bar{x}$ = கணக்கில் சராசரி மதிப்பெண் $= \frac{490}{10}$

$= 49$

$\bar{y}$ = ஆங்கிலத்தில் சராசரி மதிப்பெண் $= \frac{450}{10}$

$= 45$

ஆகவே, $\bar{x}=49$; $\bar{y}=45$; $\Sigma x' = 0$; $\Sigma y' = 0$; $\Sigma x'^2 = 5150$ $\Sigma y'^2 = 920$.

மேலும் $\Sigma x'y' = -1449$.

$$\therefore \quad r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)\ (\Sigma y'^2)}}$$

$$= \frac{-1449}{\sqrt{5150 \times 920}}$$

$$= \frac{-144{\cdot}9}{217{\cdot}5}$$

$$= -\ 0{\cdot}66$$

இதனால், கணக்கு ஆங்கிலப் பாடங்களின் தேர்வுகளில் எடுத்த மதிப்பெண்களுக்கு இடையே எதிர் உடன் தொடர்பைக் காண்கிறோம். அவ்வுடன் தொடர்புக் கெழு —0·66 எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 266

உளவியல் அறிவுத் திறமைத் தேர்வும், எண் கணிதத் திறமைத் தேர்வும் 10 குழந்தைகளுக்கு அளிக்கப்பட்டது. கீழ்க் காணும் பட்டியல் தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் அறிவு விகிதமும் (Intelligence Ratio-I.R), எண் கணித விகிதமும் (Arithmatic Ratio-A.R) தருகிறது. உடன் தொடர்புக் கெழு கணக்கிடுக.

குழந்தை	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
அ.வி. I.R.	105	104	102	101	100	99	98	96	93	92
எ.வி. A.R	101	103	100	98	95	96	104	92	97	94

தீர்வு : உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

குழந்தை	அ.வி. I.R. x	உண்மைச் சராசரி 99 -லிருந்து விலக்கம் x	விலக்கங்களின் வர்க்கம் x'^2	எ.வி. A.R. y	உண்மைச் சராசரி 98 -லிருந்து விலக்கம் y'	விலக்கங்களின் வர்க்கம் y'^2	விலக்கங்களின் வர்க்கம் $x'y'$
A	105	6	36	101	3	9	18
B	104	5	25	103	5	25	25
C	102	3	9	100	2	4	6
D	101	2	4	98	0	0	0
E	100	1	1	95	—3	9	—3
F	99	0	0	96	—2	4	0
G	98	—1	1	104	6	36	—6
H	96	—3	9	92	—6	36	18
I	93	—6	36	97	—1	1	6
J	92	—7	49	94	—4	16	28
$n=10$	990		170	980		140	92

அறிவு விகிதச் சராசரி $= \frac{\Sigma x_i}{n}$

$$= \frac{990}{10}$$

$$= 99$$

எண் கணித விகிதச் சராசரி $= \frac{\Sigma y_i}{n}$

$$= \frac{980}{10}$$

$$= 98$$

கார்ல் பியர்சனின் சூத்திரம் :

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)(\Sigma y'^2)}}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து

$\bar{x} = 99$; $\bar{y} = 98$; $\Sigma x'^2 = 170$; $\Sigma y'^2 = 149$; $\Sigma x'y' = 92$

$$\therefore \quad r = \frac{92}{\sqrt{170 \times 140}}$$

$$= \frac{92}{154 \cdot 3}$$

$$= 0 \cdot 6 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி 267

கீழ்க் காணும் விவரங்களிலிருந்து உடன் தொடர்புக் கெழு காண்.

X	600	—500	—400	—200	600	700	—300	—500
Y	—1800	1650	1250	600	—1800	—1050	900	1500

தீர்வு :

உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

X	சராசரி (0) யிலிருந்து விலக்கம் $x' = X - 0$	விலக்கங்களின் வர்க்கம் $x'^2 = (X-0)^2$	Y	சராசரி (150) யிலிருந்து விலக்கம் $y' = Y - 150$	விலக்கங்களின் வர்க்கம் y'^2	விலக்கங்களின் பெருக்கல் $x'y'$
600	600	3,60,000	—1800	—1950	38,02,500	—11,70,000
—500	—500	2,50,000	1650	1500	22,50,000	— 7,50,000
—400	—400	1,60,000	1250	1050	11,02,500	— 4,20,000
—200	—200	40,000	600	450	2,02,500	— 90,000
600	600	3,60,000	—1800	—1950	38,02,500	—11,70,000
700	700	4,90,000	—1050	—1200	14,40,000	— 8,40,000
—300	—300	90,000	900	750	5,62,500	— 2,25,000
—500	—500	2,50,000	1500	1350	18,22,500	— 6,75,000
$\Sigma X = 0$	$\Sigma x' = 0$	$\Sigma x'^2 = 20,00,000$	$\Sigma Y = 1200$		$\Sigma y'^2 = 1,49,85,000$	$\Sigma x'y' = -53,40,000$

$$\therefore \quad r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)(\Sigma y'^2)}}$$

$$= \frac{-53{,}40{,}000}{\sqrt{20{,}00{,}000 \times 1{,}49{,}85{,}000}}$$

$$= \frac{-53{,}40{,}000}{\sqrt{2{,}99{,}70{,}00{,}00{,}00{,}000}}$$

$$= \frac{-534}{547 \cdot 5}$$

$$= -\cdot 975 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மேற்கண்ட கணக்கில் X, Y களுக்கு இடையே எதிர் உடன் தொடர்பு இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 268

கீழ்க் காணும் பட்டியலில் கொடுத்துள்ள போட்ட முதலுக்கும் எடுத்த இலாபத்துக்கும் இடையே உள்ள கார்ல் பியர்சனின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

போட்ட முதல் (1000 ரூபாயில்)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
இலாபம் (1000 ரூபாயில்)	2	4	8	5	10	15	14	20	22	30

(காசி—பி. காம். – 1962)

தீர்வு :

கார்ல் பியர்சனின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடல் ;

போட்ட முதல் (1000 ரூபாயில்) x	இலாபம் (1000 ரூபாயில்) y	உண்மைச் சராசரி (55) யிலிருந்து விலக்கம் x'	விலக்கங்களின் வர்க்கம் x'^2	உண்மைச் சராசரி (13) யிலிருந்து விலக்கம் y'	விலக்கங்களின் வர்க்கம் y'^2	விலக்கங்களின் பெருக்கல் $x' \times y'$
10	2	—45	2025	—11	121	495
20	4	—35	1225	— 9	81	315
30	8	—25	625	— 5	25	125
40	5	—15	225	— 8	64	120
50	10	— 5	25	— 3	9	15
60	15	5	25	2	4	10
70	14	15	225	1	1	15
80	20	25	625	7	49	175
90	22	35	1225	9	81	315
100	30	45	2025	17	289	765
550	130	0	8250		724	2350

போட்ட முதலின் கூட்டுச் சராசரி $= \frac{\Sigma x_i}{n}$

$$= \frac{550}{10} = 55$$

எடுத்த இலாபத்தின் கூட்டுச் சராசரி $= \frac{\Sigma y_i}{n}$

$$= \frac{130}{10} = 13$$

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து,

$$\Sigma x = 550; \quad \bar{x} = 55, \quad \Sigma x' = 0; \quad \Sigma x'^2 = 8250$$

$$\Sigma y = 130, \quad \Sigma y'^2 = 724; \quad \Sigma x'y' = 2350$$

ஆகவே, உடன் தொடர்பு

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)\ (\Sigma y'^2)}}$$

$$= \frac{2350}{\sqrt{8250 \times 724}} = \frac{2350}{2443{\cdot}9}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}961} \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி 269

சென்ற ஒரு வருட மக்கள் கணிப்பில் கிடைத்த இரண்டு நகர்களின் மக்கள் தொகையை ஆயிரத்தில் கீழ்க்காணும் பட்டியல் தருகிறது.

ஆண்டு	1881	1891	1901	1911	1921	1931	1941
ஆக்ரா	160	169	188	154	164	205	284
கான்பூர்	155	194	203	179	216	243	287

ஆக்ரா, கான்பூர் என்ற இரு நகர்களுக்கிடையேயுள்ள மக்கள் தொகையின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

(எம்.ஏ.—ராஜஸ்தான்—1948)

தீர்வு:

உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

ஆண்டு	ஆக்ரா மக்கள் தொகை			கான்பூர் மக்கள் தொகை			விலக்கங் களின் வர்க்கம் $d_x \times d_y$
	x	$A=189$ லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்கங் களின் வர்க்கம் d_x^2	y	$B=211$ லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்கங் களின் வர்க்கம் d_y^2	
1881	601	—29	841	155	—56	3136	1624
1891	169	—20	400	194	—17	289	340
1901	188	—1	1	203	—8	64	8
1911	154	—35	1225	179	—32	1024	1120
1921	164	—25	625	216	5	25	—125
1931	205	16	256	243	32	1024	512
1941	284	95	9025	287	76	5776	7220
$n=7$	$\Sigma x = 1324$	$\Sigma d_x = 1$	$\Sigma d_x^2 = 12373$	$\Sigma y = 1477$	$\Sigma d_y = 0$	$\Sigma d_y^2 = 11338$	$\Sigma d_x d_y = 10699$

$$\text{உடன் தொடர்புக் கெழு } r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]\left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

$$\therefore \quad r = \frac{10699 - \frac{(1 \times 0)}{7}}{\sqrt{\left[12373 - \frac{(1)^2}{7}\right]\left[11338 - \frac{(0)^2}{7}\right]}}$$

$$= \frac{10699}{\sqrt{12372 \cdot 857 \times 11338}}$$

$$= \frac{10699}{\sqrt{140283486 \cdot 68}}$$

$$= \frac{10699}{11844}$$

$$= +0 \cdot 90 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

ஆகவே, ஆக்ரா, கான்பூர் ஆகிய இரு நகர்களின் மக்கள் தொகைகளுக்கு இடையேயுள்ள உடன் தொடர்புக் கெழு + 0·90 எனக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. இது நேர் தொடர்புக் கெழுவெனக் கொண்டு, இரு நகருக்கும் இடையே நேரிடைத் தொடர்பைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 270

கீழ்க்காணும் பட்டியல் கல்கத்தா, காரச்சி, ஆகிய இரு நகர்களின் மொத்த விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண்களை 1927—1941 என்ற ஆண்டுகளுக்குக் கொடுக்கிறது. இரு வரிசைகளுக்கும் இடையே உள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு அவை எவற்றைக் குறிக்கின்றன எனக் கூறு.

ஆண்டு	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934
கல்கத்தா	148	145	141	116	96	91	87	89
கராச்சி	137	137	133	108	95	99	97	96

ஆண்டு	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941
கல்கத்தா	91	91	102	95	108	120	139
கராச்சி	99	102	108	104	108	116	120

(பி. காம்.—அலகாபாத்—1944)

கல்கத்தா, கான்பூருக்கிடையேயுள்ள முழு விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண்கள் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

ஆண்டுகள்	கல்கத்தா x வரிசை		
	குறியீட்டெண் x	(91)லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2
1927	148	57	3249
1928	145	54	2916
1929	141	50	2500
1930	116	25	625
1931	96	5	25
1932	91	0	0
1933	87	— 4	16
1934	89	— 2	4
1935	91	0	0
1936	91	0	0
1937	102	11	121
1938	95	4	16
1939	108	17	189
1940	120	29	841
1941	139	48	2304
$n=15$		$\Sigma d_x=294$	$\Sigma d_x^2=12806$

ஆண்டுகள்	கராச்சி y வரிசை			விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	குறியீட்டெண் y	(108) லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் dy^2	
1927	137	29	841	1653
1928	137	29	841	1566
1929	133	25	625	1250
1930	108	0	0	0
1931	95	—13	169	—65
1932	99	— 9	81	0
1933	97	—11	121	44
1934	96	—12	144	24
1935	99	— 9	81	0
1936	102	— 6	36	0
1937	108	0	0	0
1938	114	— 4	16	—16
1939	108	0	0	0
1940	116	8	64	232
1941	120	12	144	576
		$\Sigma d_y = 39$	$\Sigma d_y^2 = 3163$	$\Sigma d_x d_y = 5264$

$$\text{உடன் தொடர்புக் கெழு } r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left(\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right)\left(\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right)}}$$

$$\therefore \; r = \frac{5264 - \frac{294 \times 39}{15}}{\sqrt{\left(12806 - \frac{(294)^2}{15}\right)\left(3163 - \frac{(39)^2}{15}\right)}}$$

$$= \frac{5264 - \frac{11466}{15}}{\sqrt{\left(12806 - \frac{86436}{15}\right)\left(3163 - \frac{1521}{15}\right)}}$$

$$= \frac{5264 - 764.4}{\sqrt{(12806 - 5762.4)(3163 - 101.4)}}$$

$$= \frac{4499.6}{\sqrt{7043.6 \times 3061.6}}$$

$$= \frac{4499.6}{4669.56} = 0.96$$ (தோராயமாக)

கல்கத்தாவிற்கும், கராச்சிக்கும் இடையே கொடுத்துள்ள மொத்த விற்பனை விலைக் குறியீட்டெண்களுக்குள்ள உடன் தொடர்புக் கெழு 0.96 ஆக, மிக உயர் எண்ணுக உள்ளது. ஆகவே, உயர்தர உயர் அளவு நேரிடைத் தொடர்பை இரு நகர்களுக்கிடையே காண்கிறோம்

மாதிரி 271

கீழ்க்காணும் பட்டியலுக்கு 'r'ஐயும் ஊகப் பிழையையும் (Probable Error) கணக்கிடுக.

நகர்	சாகுபடியாகும் நிகரப்பரப்பு (ஏக்கர்—லட்சத்தில்)	ஏர்களின் எண்ணிக்கை (லட்சத்தில்)
உத்தரப் பிரதேசம்	359	52
சென்னை	310	44
பம்பாய்	285	12
பஞ்சாப்	275	24
பி & ஓ	257	35
இ. பி.	245	16
வங்காளம்	240	46
அஸ்ஸாம்	64	11
சிந்து	48	3
என். டபிள் யூ எப். பி	23	2
இந்தியாவின் சராசரி	211	25

தீர்வு :

உடன் தொடர்புக் கெழு கணக்கிடல் :

பரப்பு (ஏக்கர் லட்சத்தில்) x_i	(211) லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	ஏர்களின் எண்ணிக்கை (லட்சத்தில்) y	(25)லிருந்து வர்க்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
359	148	21904	52	27	729	3996
310	99	9801	44	19	361	1881
285	74	5476	12	—13	169	—962
275	64	4096	24	— 1	1	— 64
257	46	2116	35	10	100	460
245	34	1156	16	— 9	81	—306
240	29	841	46	21	441	609
64	—147	21609	11	—14	196	2058
48	—163	26969	3	—22	484	3586
23	—188	35344	2	—23	529	4374
$n = 10$	$\Sigma d_x = -4$	$\Sigma d_x^2 = 128912$		$\Sigma d_y = -5$	$\Sigma d_y^2 = 3091$	$\Sigma d_x d_y = 15582$

உடன் தொடர்புக் கெழுவின் ஊகப்பிழை (Probable Error) :

$$= 0{\cdot}6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

$$= 0{\cdot}6745 \frac{1-(0{\cdot}78)^2}{\sqrt{n}}$$

$$= 0{\cdot}6745 \frac{1-0{\cdot}6084}{3{\cdot}162}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}0835} \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 272

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுத்துள்ள ஏற்றுமதி செய்யப்பட்ட சுத்தம் செய்யப்படாத பஞ்சின் மதிப்பிற்கும் இறக்குமதி செய்யப்பட்ட பருத்தி ஆடைகளின் மதிப்பிற்கும் உள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக. உடன் தொடர்பின் திட்டப் பிழையையும் (Standard Error) கணக்கிடுக.

ஆண்டு	1913—14	1917—18	1919—20	1921—22
ஏற்றுமதி செய்யப்பட்ட சுத்தம் செய்யப் படாத பருத்தி (ரூபாய்-கோடியில்)	42	44	58	55
இறக்குமதியான பருத்து ஆடை கள் மதிப்பு (ரூபாய்-கோடியில்)	56	49	53	58
ஆண்டு	1923—24	1929—30	1931—32	மொத்தம்
ஏற்றுமதி செய்யப்பட்ட சுத்தம் செய்யப் படாத பருத்தி (ரூபாய்-கோடியில்)	89	98	66	452
இறக்குமதியான பருத்தி ஆடை கள் மதிப்பு (ரூபாய்-கோடியில்)	65	76	58	415

(பி.காம்—நாக்பூர்—1944)

தீர்வு :

உடன் தொடர்புக் கெழு கணக்கிடல் :

ஆண்டு	ஏற்றுமதி			இறக்குமதி			விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	பருத்தி (கோடி ரூபாயில்) x_i	(64)லிருந்து விலக்கம் dx	விலக்க வர்க்கம் dx^2	உற்பத்தியான பருத்தி ஆடை (கோடி ரூபாயில்) y_i	(59)லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	
1913—14	42	—22	484	56	— 3	9	66
1917—18	44	—20	400	49	—10	100	200
1919—20	58	— 6	36	53	— 6	36	36
1921—22	55	— 9	81	58	— 1	1	9
1923—24	89	25	625	65	6	36	150
1929—30	98	34	1156	76	17	289	578
1931—32	66	2	4	58	— 1	1	—2
$n=7$		$\Sigma d_x=4$	$\Sigma d_x^2=2786$		$\Sigma d_y=2$	$\Sigma d_y^2=472$	$\Sigma d_x d_y = 1037$

உடன் தொடர்புக் கெழு
$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left(\Sigma d_x - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right)\left(\Sigma d_y - \frac{(\Sigma d_y)^2}{c}\right)}}$$

$$\therefore \quad r = \frac{1037 - \frac{(4)\times(2)}{n}}{\sqrt{\left(2786 - \frac{(4)^2}{7}\right)\left(472 - \frac{(2)^2}{7}\right)}}$$

$$= \frac{1035\cdot86}{\sqrt{2783\cdot71 \times 471\cdot43}}$$

$$= \frac{1035\cdot86}{1145\cdot56} = +0\cdot96 \text{ (தோராயமாக)}$$

திட்டப் பிழை (Standard Error) :

உடன் தொடர்பின் திட்டப்பிழை
$$= \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$
$$= \frac{1-(0\cdot9)^2}{\sqrt{7}}$$
$$= \frac{1-(0\cdot81)}{2\cdot65} = 0\cdot0702$$

மாதிரி 273

கீழ்க்காணும் பட்டியல் முழு மக்கள் தொகைப் பரவலையும் அதனிலுள்ள முழு அளவு, அல்லது ஓரளவு கண் பார்வையற்றவர்களின் எண்ணிக்கையையும் கொடுக்கிறது. அம் மக்கள் தொகைப் பட்டியலின்படி வயதிற்கும் கண்பார்வையின்மைக்கும் ஏதேனும் தொடர்பு இருக்கிறதா என ஆராயவும்.

வயது	மக்கள்தொகை (ஆயிரத்தில்)	கண்பார்வையின்மை
0—10	100	55
10—20	60	40
20—30	40	40
30—40	36	40
40—50	24	36
50—60	11	22
60—70	6	18
70—80	3	15

(பி.காம். – ஆக்ரா—1939)

தீர்வு :

'r' ஐக் கணக்கிடல் :

வயதுப் பிரிவு	மத்திய மதிப்பு x_i	வயது		கண் பார்வையின்மை			விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x' \times d_y$
		$A=45$ விருந்து மறு விலக்கம் $d_x' = \left(\frac{x-45}{10}\right)$	விலக்க வர்க்கம் $d_x'^2$	கண் பார்வையின்மை (லட்சத்திற்கு)	$B=185$ விருந்து விலக்கம் $d_y=(y-185)$	விலக்க வர்க்ககம் d_y^2	
0—10	5	—4	16	55	—130	16900	520
10—20	15	—3	9	67	—118	13924	354
20—30	25	—2	4	100	— 85	7225	170
30—40	35	—1	1	111	— 74	5476	74
40—50	45	0	0	150	— 35	1225	0
50—60	55	1	1	200	15	225	15
60—70	65	2	4	300	115	13225	230
70—80	75	3	9	500	135	99225	945
$n=8$		—4	44		3	157425	2308

கார்ல் பியர்சன் சூத்திரம் $r = \dfrac{\Sigma d_x' \ d_y - \dfrac{(\Sigma d_x')(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x'^2 - \dfrac{(\Sigma d_x^2)}{n}\right]\left[\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$

மேற்கண்ட பட்டியலின் மூலம்,

$\Sigma d_x' = -4;\ \Sigma d_x'^2 = 44;\ \Sigma d_y = 3;\ \Sigma d_y^2 = 157425;\ \Sigma d_x' d_y = 2308$

ஆகையால் $r = \dfrac{2308 - \dfrac{(-4) \times (3)}{8}}{\sqrt{\left[44 - \dfrac{16}{8}\right]\left[157425 - \dfrac{9}{8}\right]}}$

$= \dfrac{2309{\cdot}5}{\sqrt{42 \times 157424{\cdot}8}}$

$= \dfrac{2309{\cdot}5}{\sqrt{6611841{\cdot}6}}$

$= \dfrac{2309{\cdot}5}{2571{\cdot}3} = 0{\cdot}898$ (தோராயமாக)

$r = 0{\cdot}898$ என அதிகமாக இருப்பதால் வயது அதிகம் ஆக ஆக கண்பார்வையின்மையும் அதிகமாகிறது. இவ்வயது, கண்பார்வை யின்மை இரண்டும் நேர் தொடர்பு கொண்டு விளங்குகின்றன.

மாதிரி 274

கீழே உள்ள பட்டியலிலுள்ள சில நாடுகளின் 1931-ம்ஆண்டின் பிறப்பு விகிதத்திற்கும், இறப்பு விகிதத்திற்கும் இடையே உள்ள கார்ல் பியர்சனின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

நாடுகள்	பிறப்பு விகிதம்	இறப்பு விகிதம்	நாடுகள்	பிறப்பு விகிதம்	இறப்பு விகிதம்
எகிப்து	44	27	ஐ.எப்.மாநிலம்	20	14
கனடா	24	12	யு.கே.	16	12
அமெரிக்கா	19	12	யு.எஸ்.எஸ்.ஆர்.	40	18
இந்தியா	33	24	ஆஸ்திரேலியா	20	9
ஜப்பான்	32	19	நியூசிலாந்து	18	8
ஜெர்மனி	16	11	பாலஸ்தீனம்	53	23
பிரான்சு	18	16	சுவீடன்	17	12
			நார்வே	15	11

தீர்வு :

உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடல் ;

நாடுகள்	பிறப்பு விகிதம்			இறப்பு விகிதம்			விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	பிறப்பு விகிதம் x_i	(26) லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்கங்களின் வர்க்கம் d_x^2	இறப்பு விகிதம் y	(15) லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்கங்களின் வர்க்கம் d_y^2	
எகிப்து	44	18	324	27	12	144	216
கனடா	24	—2	4	11	—4	16	8
அமெரிக்கா	19	—7	49	12	—3	9	21
இந்தியா	33	7	49	24	9	81	63
சப்பான்	32	6	36	19	4	16	24
செர்மனி	16	—10	100	11	—4	16	40
பிரான்சு	18	—8	64	16	1	1	—8
ஐ.எப்.மா நிலம்	20	—6	36	14	—1	1	6
யு.கே.	16	—10	100	12	—3	9	30
யு.எஸ்.எஸ்.ஆர்.	40	14	196	18	3	9	42
ஆஸ்திரேலியா	20	—6	36	9	—6	36	36
நியூசிலாந்து	18	—8	64	8	—7	49	56
பாலஸ்தீனம்	53	27	729	23	8	64	216
சுவீடன்	17	—11	121	12	—3	9	33
நார்வே	15	—9	81	11	—4	16	36
$n = 15$	385	—5	1989	227	2	476	819

கார்ல் பியர்சனின் உடன் தொடர்புக் கெழு $r = \dfrac{d_x d_y - \dfrac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]\left[\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து,

$$n = 15;\ \Sigma x = 385:\ \Sigma y = 227;\ \Sigma d_x = -5;\ \Sigma d_y = 2;$$

$$\Sigma d_x^2 = 1989;\ \Sigma d_y^2 = 476;\ \Sigma d_x d_y = 819.$$

பிறப்பு விகிதத்தின் கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

$$= \frac{385}{15}$$

$$= 25{\cdot}666$$

இறப்பு விகிதத்தின் கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{\Sigma y_i}{n}$

$$= \frac{227}{15}$$

$$= 15{\cdot}133$$

மேற்கண்ட மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டால்,

$$r = \frac{819 - \dfrac{(-5)\times(2)}{15}}{\sqrt{\left[1989 - \dfrac{(-5)^2}{15}\right]\left[476 - \dfrac{(2)^2}{15}\right]}}$$

$$= \frac{819 + 0{\cdot}667}{\sqrt{[1989 - 1{\cdot}669]\ [476 - 0{\cdot}267]}}$$

$$= \frac{819 \cdot 67}{\sqrt{945358 \cdot 6}}$$

$$= \frac{819 \cdot 667}{972 \cdot 2}$$

$$= 0 \cdot 84$$

மேலே கொடுத்துள்ள நாடுகளில் பிறப்பு விகிதத்திற்கும் இறப்பு விகிதத்திற்கும் உயரிய அளவு நேரிடை உறவு உள்ளது என்பதை $r = 0 \cdot 84$ என்பதிலிருந்து அறிகிறோம்.

மாதிரி 275

கீழ்க்காணும் பட்டியலிலுள்ள மதிப்புகளுக்கு உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கண்டுபிடி.

ஆண்டு	1925	1926	1927	1928	1929
தினக்கூலிகளின் சராசரி (ஆயிரத்தில்)	368	384	385	361	347
ஆலையில் செலவாகிய பஞ்சு மூட்டைகள் (லட்சத்தில்)	22	21	24	20	22
ஆண்டு	**1930**	**1931**	**1932**	**1933**	**1934**
தினக்கூலிகளின் சராசரி (ஆயிரத்தில்)	384	395	403	400	385
ஆலையில் செலவாகிய பஞ்சு மூட்டைகள் (லட்சத்தில்)	26	26	29	28	27

(பி.காம். —ஆக்ரா—1941)

தீர்வு : உடன் தொடர்புக் கெழு கணக்கிடல் :

ஆண்டு	தினக்கூலிகளின் எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்)			ஆலையில் செலவாகிய பஞ்சு மூட்டைகள் (கோடியில்)			விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	x	ஊகச்சராசரி (381)லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	y	ஊகச்சராசரி (25)லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	
1925	368	—13	169	22	—3	9	39
1926	384	3	9	21	—4	16	—12
1927	385	4	16	24	—1	1	—4
1928	361	—20	400	20	—5	25	100
1929	347	—34	1156	22	—3	9	102
1930	384	3	9	26	1	1	3
1931	395	14	196	26	1	1	14
1932	403	22	484	29	4	16	88
1933	400	19	361	28	3	9	57
1934	385	4	16	27	2	4	8
$n=10$	3812	2	2816	245	—5	91	395

மேற்கண்ட பட்டியலில்,

$n = 10;\ \Sigma x = 3812;\ \Sigma d_x = 2;\ \Sigma d_x^2 = 2816;$

$\Sigma y = 245;\ \Sigma d_y = -5;\ \Sigma d_y^2 = 91;\ \Sigma d_x d_y = 395.$

$$\Sigma d_x d_y - (\Sigma d_x)(\Sigma d_y)$$

கார்ல் பியர்சனின் சூத்திரம்

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]\left[\Sigma d_y - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

ஆகவே,

$$r = \frac{396 - \frac{(2)\times(-5)}{n}}{\sqrt{\left[2816 - \frac{(2)^2}{10}\right]\left[91 - \frac{(-5)^2}{10}\right]}}$$

$$= \frac{396}{\sqrt{2815 \cdot 6 \times 88 \cdot 5}}$$

$$= \frac{396}{\sqrt{249180}}$$

$$= \frac{396}{499 \cdot 2}$$

$= 0{\cdot}79$ (தோராயமாக)

$r = 0{\cdot}79$ (தோராயமாக)

மாதிரி 276

1936-ல் நடந்த மெட்ரிக்குலேசன் தேர்வு முடிவுகளைக் கீழ்வரும் பட்டியல் தருகிறது. உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு ஊகப் பிழையை மதிப்பிடு. உனது முடிவுகளிலிருந்து தோல்வியும் வயதும் உடன் தொடர்புடையவை என நிச்சயமாகக் கூற இயலுமா ?

தேர்வு எழுதும் மாணவனின் வயது	13—14	14—15	15—16	16—17	17—18
தோல்வி சதவீதம்	39·2	40·6	43·4	34·2	36·6
தேர்வு எழுதும் மாணவனின் வயது	18—19	19—20	20—21	21—22	
தோல்வி சதவீதம்	39·2	48·9	47·1	54·5	

(எம். காம்.—ஆக்ரா—1963)

தீர்வு:

உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

வயது (ஆண்டு களில்)	தேர்வு எழுதும் மாணவன் வயது (X-வரிசை)			தோல்வி சதவீதம் (Y-வரிசை)			விலக்கங் களின் பெருக்கல் $d_y \times d_y$
	மத்திய மதிப்பு x	(17·5) லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	தோல்வி சதவீதம் y	(40) லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	
13—14	13·5	—4	16	39·2	—0·8	0·64	3·2
14—15	14·5	—3	9	40·6	0·6	0·36	— 1·8
15—16	15·5	—2	4	43·4	3·4	11·56	— 6·8
16—17	16·5	—1	1	34·2	—5·8	33·64	5·8
17—18	17·5	0	0	36·6	—3·4	11 56	0
18—19	18·5	1	1	39·2	—0·8	0·64	— 0·8
19—20	19·5	2	4	48·9	8·9	79·21	17·8
20—21	20·5	3	9	47·1	7·1	50·41	21·3
21—22	21·5	4	16	54·5	14·5	210·25	58·0
$n = 9$		0	60		23·7	398·27	96·7

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க்காண்பவற்றை அடைகிறோம்.

$$n=9\,;\ \Sigma d_x=0\,;\ \Sigma d_x^2=60\,;\ \Sigma d_y=23{\cdot}7\,;$$
$$\Sigma d_y^2=398{\cdot}27\,;\quad \Sigma d_x d_y=96{\cdot}7.$$

கார்ல் பியர்சனின் உடன் தொடர்புக் கெழு

$$r=\frac{\Sigma d_x\ d_y-\dfrac{(\Sigma d_x)\quad(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2-\dfrac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]\left[\Sigma d_y^2-\dfrac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

$$=\frac{96{\cdot}7-\dfrac{0\times 23{\cdot}7}{9}}{\sqrt{[60-0]\left[398{\cdot}27-\dfrac{(23{\cdot}7)^2}{9}\right]}}$$

$$=\frac{96{\cdot}7}{\sqrt{60\times 335{\cdot}86}}$$

$$=\frac{96{\cdot}7}{141{\cdot}9}$$

$$=\mathbf{0{\cdot}68}\quad(\text{தோராயமாக})$$

ஊகப் பிழை (Probable Error) :

உடன் தொடர்புக் கெழுவின் ஊகப் பிழை

$$=0{\cdot}6745\times\frac{(1-r^2)}{\sqrt{n}}$$

$$=0{\cdot}6745\times\frac{1-(-0{\cdot}68)^2}{\sqrt{9}}$$

$$=\mathbf{0{\cdot}12}\ (\text{தோராயமாக})$$

இங்கு, உடன் தொடர்புக் கெழு அதன் ஊகப் பிழையை விட 6 மடங்கிற்கும் குறைவாக இருப்பதால் இது குறிப்பாக (significant) சிறப்புடையதாக இல்லை. எனவே இங்குத் தோல்வியானது வயதுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளது எனத் திட்டவட்டமாகக் கூற இயலவில்லை.

மாதிரி 277

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் ஏழு ஆண்டுகளின் சேமிப்பு வங்கியில் போட்ட தொகைகளும் வேலை நிறுத்தமும் கதவடைப்பும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றின் இடையே உள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

சேமிப்பு வங்கித் தொகைகள் (லட்சத்தில்)	51	54	55	59	65	60	70
வேலை நிறுத்தமும் கதவடைப்பும்	38	44	33	36	33	23	10

(பி.காம்.—ஆந்திரா—1944)

தீர்வு :

உடன் தொடர்புக் கெழு கணக்கிடல் :

வரிசை எண்	சேமிப்பு வங்கித் தொகைகள் (ஆயிரத்தில்)			வேலை நிறுத்தமும், கதவடைப்பும்			விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	x	50 லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	y	30 லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	
1	51	1	1	38	8	64	8
2	54	4	16	44	14	196	56
3	55	5	25	33	3	9	15
4	59	9	81	36	6	36	54
5	65	15	225	33	3	9	45
6	60	10	100	23	−7	49	−70
7	70	20	400	10	−20	400	−400
$n=7$		64	848			763	−292

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து,

$n = 7$; $\Sigma d_x = 64$; $\Sigma d_x^2 = 848$; $\Sigma d_y = 7$; $\Sigma d_y^2 = 763$;

$\Sigma d_x d_y = -292$.

கார்ல் பியர்சனின் உடன் தொடர்புக் கெழு,

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left(\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right)\left(\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right)}}$$

$$\text{ஆகவே, } r = \frac{-292 - \frac{(64)\times(7)}{7}}{\sqrt{\left(848 - \frac{(64)^2}{7}\right)\left(763 - \frac{(7)^2}{7}\right)}}$$

$$= \frac{-292 - 64}{\sqrt{(848 - 585{\cdot}1) \times (763 - 7)}}$$

$$= \frac{-356}{\sqrt{262{\cdot}9 \times 736}}$$

$$= \frac{-356}{\sqrt{198752{\cdot}4}}$$

$$= -\frac{356}{445{\cdot}8} = -0{\cdot}8 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 278

50 மொத்த எண்ணிக்கை கொண்ட X, Y என்ற இரு வரிசைகள் முறையே 4·5; 3·5 களைத் தமது திட்ட விலக்கங்களாக (Standard deviation) கொண்டுள்ளன. x வரிசைகளின் தனித்தனிக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுத்த விலக்கங்களின் பெருக்கல்களின் கூட்டுத் தொகை 420 எனில் X, Y-களுக்கு இடையே உள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காண்.

தீர்வு :

கணக்கில் கீழ்க் காணும் மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ள :

$n = 50$; $\sigma_x = 4{\cdot}5$, $\sigma_y = 3{\cdot}5$; $\Sigma x'y' = 420$

$$\therefore \quad r = \frac{\Sigma x'y'}{n\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$= \frac{420}{50 \times 4 \cdot 5 \times 3 \cdot 5}$$

$$= \frac{420 \times 2 \times 2}{50 \times 9 \times 7}$$

$$= \frac{8}{15}$$

$$= 0 \cdot 53$$

மாதிரி 279

இரண்டு வரிசைகளின் உடன் தொடர்புக் கெழு 0·85. அவைகளின் உடன் மாற்றம் (co-variance) 6·5. முதல் வரிசையின் மாறுபாடு (variance) 6·1 எனில் இரண்டாம் வரிசையின் திட்ட விலக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

இரண்டு வரிசைகளும் முறையே X, Y ஆக இருக்கட்டும்.
உடன் மாற்றம் (co-variance) என்பது $= \dfrac{\Sigma x' y'}{n}$

இங்கு $\Sigma x' y'$ என்பது

X, Y வரிசைகள் தனித்தனியே தமது கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுத்த விலக்கங்களில் பெருக்கல்களின் கூட்டுத்தொகை ஆகும்.

X-ன் மாறுபாடு (variance) $= \sigma_x^2 = 6 \cdot 1$

X-ன் திட்ட விலக்கம் $= \sigma_x = 2 \cdot 47$

$$\therefore \; r = \frac{\Sigma x' y'}{n\sigma_x \sigma_y} = \frac{\left(\dfrac{\Sigma x' y'}{n}\right)}{\sigma_x \sigma_y}$$

ஆகையால்,

$$85 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 47 \times \sigma_y}$$

$$= 2 \cdot 1 \sigma_y = 6 \cdot 5$$

$$\therefore \; \sigma_y = y\text{-ன் திட்ட விலக்கம்} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$$

$$= 3 \cdot 1 \text{ (தோராயமாக)}$$

ஆகவே, இரண்டாம் வரிசையின் திட்ட விலக்கம் (Standard deviation) $= 3 \cdot 1$ (தோராயமாக)

மாதிரி 280

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து x, y-களுக்கு இடையே உள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காண்.

விவரம்	x வரிசை	y வரிசை
விவரங்களின் எண்ணிக்கை	15	15
கூட்டுச் சராசரி	25	18
கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து உள்ள விலக்கங்களின் வர்க்கம்	136	138
x, y வரிசைகள், தனித்தனியே தமது கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து அடைந்த விலக்கங்களின் பெருக்குத் தொகைகளின் கூட்டுத்தொகை	122	

(பி.காம்.—டெல்லி—1958)

தீர்வு :

அட்டவணையிலிருந்து கிடைத்தவை :

$$n = 15;\ \bar{x} = 25,\ \bar{y} = 18;\ \Sigma x'^2 = 136,\ \Sigma y'^2 = 138,\ \Sigma x'y' = 122\cdot$$

$$\therefore\ r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)\ (\Sigma y'^2)}}$$

$$= \frac{122}{\sqrt{136 \times 138}}$$

$$= \frac{61}{\sqrt{34 \times 138}}$$

$$= \frac{61}{68{\cdot}5} = 0{\cdot}89$$

மாதிரி 281

கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (n ஐக் கண்டுபிடி)

$r = 0{\cdot}5$; $\Sigma x'y' = 120$; y-ன் திட்ட விலக்கம் (S.D.) $= 8$, $\Sigma x'^2 = 90$

இதில் x', y' முறையே அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து அடைந்த விலக்கங்களாகும்.

தீர்வு :

உடன் தொடர்புக் கெழு காணும் குத்திரம்

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)(\Sigma y'^2)}}$$

இங்கு, r, $\Sigma x'y'$, $\Sigma x'^2$-ன் மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன.

$\Sigma y'^2$ ஐக் கண்டுபிடிக்க :

$$y\text{–வரிசையின் திட்டவிலக்கம்} = \sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{n}} = 8$$

$$\therefore \frac{\Sigma y'^2}{n} = 64$$

$$\text{அல்லது } \Sigma y'^2 = 64\,n$$

கொடுத்த மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டால்

$$0{\cdot}5 = \frac{120}{\sqrt{90 \times 64n}}$$

$$i.e.,\ 0{\cdot}25 = \frac{14400}{60 \times 64n}$$

$$0{\cdot}25\,(90 \times 64n) = 14400$$

$$n = \frac{14400}{0{\cdot}25 \times 90 \times 64} = 10$$

மாதிரி 282

σ_x = $\bar{x}$ வரிசையின் திட்ட விலக்கம்

σ_y = y வரிசையின் திட்ட விலக்கம்

σ_{x-y} = $(x—y)$ வரிசையின் திட்ட விலக்கம்

எனக் கொண்ட $r = \dfrac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$

என்ற சூத்திரத்தை உபயோகப்படுத்தி, கீழ்க்காணும் பட்டியலில் கொடுத்துள்ள 8 மாணவர்களின் பொருளாதார, புள்ளியியல் பாடங்களின் மதிப்பெண்களுக்கு இடையே உள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவை மதிப்பிடு.

மாணவர்களின் வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8
பொருளாதாரம்	25	30	32	35	37	40	42	45
புள்ளியியல்	8	10	15	17	20	22	24	25

தீர்வு :

மாணவர் வரிசை எண்	பொருளாதாரம் x			புள்ளியியல் y			$D=x-y$		
	x	(35) லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	y	(17) லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	D	(18) லிருந்து விலக்கம் d_D	விலக்க வர்க்கம் d_D^2
1	25	—10	100	8	—9	81	17	—1	1
2	30	— 5	25	10	—7	49	20	2	4
3	32	— 3	9	15	—2	4	17	—1	1
4	35	0	0	17	0	0	18	0	0
5	37	2	4	20	3	9	17	—1	1
6	40	5	25	22	5	25	18	0	0
7	42	7	49	24	7	49	18	0	0
8	45	10	100	25	8	64	20	2	4
	286	6	312	141	5	281	145	1	11

பொருளாதாரத்தில் சராசரி மதிப்பெண் $\frac{\Sigma x}{n} = \frac{286}{8}$

$= \mathbf{35 \cdot 75}$

புள்ளியியலில் சராசரி மதிப்பெண் $= \frac{\Sigma y}{n} = \frac{141}{8}$

$= \mathbf{17 \cdot 64}$

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{\Sigma d_x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_x}{n}\right)^2\right]$$

$$= \left[\frac{312}{8} - \left(\frac{6}{8}\right)^2\right]$$

$$= 39 - 0 \cdot 56$$

$$= 38 \cdot 44$$

$$\therefore \quad \sigma_x = \sqrt{38 \cdot 44}$$

$$= \mathbf{6 \cdot 19}$$

$$\sigma_y^2 = \left[\frac{\Sigma d_y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_y}{n}\right)^2\right]$$

$$= \left[\frac{281}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2\right]$$

$$= 35 \cdot 12 - 0 \cdot 31$$

$$= 34 \cdot 81$$

$$\therefore \quad \sigma_y = \sqrt{34 \cdot 81}$$

$$= 5 \cdot 87$$

$$\sigma_{x \cdot y}^2 = \left[\frac{\Sigma d_D^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_D}{n}\right)\right]^2$$

$$= \left[\frac{11}{8} - \left(\frac{1}{8}\right)^2\right]$$

$$= \frac{87}{64}$$

$$= 1.36$$

சூத்திரம் $$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{38.44 + 34.81 - 2 \times 13.6}{2 \times 6.19 \times 5.87}$$

$$= \frac{71.53}{2 \times 36.3}$$

$$= \frac{35.77}{36.3}$$

$= 0.998$ (தோராயமாக)

மாதிரி 283

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

என்ற சூத்திரத்தை உபயோகப்படுத்தி, கீழ்க்காணும் x, y வரிசைகளின் மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

உற்பத்தி (x)	3	5	6	9	10	12	15	20	22	28
உபயோகிப்பவர் (y)	10	12	15	18	20	22	27	30	32	34

தீர்வு : r ஐக் கணக்கிடல் :

உற்பத்தி (x)			உபயோகிப்பவர் y			வித்தியாசம் D $D=(x-y)$		
x	(13) விருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	y	(22) விருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	$D=x-y$	(9) விருந்து விலக்கம் d_D	விலக்க வர்க்கம் d_D^2
3	−10	100	10	−12	144	7	−2	4
5	− 8	64	12	−10	100	7	−2	4
6	− 7	49	15	− 7	49	9	0	0
9	− 4	16	18	− 4	16	9	0	0
10	− 3	9	20	− 2	4	10	1	1
12	− 1	1	22	0	0	10	1	1
15	2	4	27	5	25	12	3	9
20	7	49	30	8	64	10	1	1
22	9	81	32	10	100	10	1	1
28	15	225	34	12	144	6	−3	9
130	0	598	220	0	646	90	0	30

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{\Sigma d_x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_x}{n}\right)^2\right]$$

$$= \left[\frac{598}{10} - \left(\frac{0}{10}\right)^2\right]$$

$$= 59{\cdot}8$$

$$\therefore \quad \sigma_x = \sqrt{59{\cdot}8}$$

$$= 7{\cdot}73$$

$$\sigma_y^2 = \left[\frac{\Sigma d_y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_y}{n}\right)^2\right]$$

$$= \left[\frac{646}{10} - \left(\frac{0}{10}\right)^2\right]$$

$$= 64{\cdot}6$$

$$\therefore \quad \sigma_y = \sqrt{64{\cdot}6}$$

$$= 8{\cdot}04$$

$$\sigma_D^2 = \left[\frac{\Sigma d_D^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_D}{n}\right)^2\right]$$

$$= \left[\frac{30}{10} - \left(\frac{0}{10}\right)^2\right]$$

$$= 3$$

சூத்திரம் $r = \dfrac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$

$$= \frac{59{\cdot}8 + 64{\cdot}6 - 3}{2\sqrt{59{\cdot}8}\ \sqrt{64{\cdot}6}}$$

$$= \frac{121.4}{2 \times 7.73 \times 8.04}$$

$$= \frac{60.7}{62.23}$$

$$= 0.975$$ (தோராயமாக)

மாதிரி 284

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் குறுகிய கால அலைவுகளைக் (Short-time Oscillation) கண்டுபிடித்து, அவற்றிற்கு உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காண்.

ஆண்டு	1921	1922	1923	1924	1925
விற்பனைக்கு வரும் சரக்கு	80	82	86	91	83
விலை	146	140	130	117	133
ஆண்டு	1926	1927	1928	1929	
விற்பனைக்கு வரும் சரக்கு	85	89	96	93	
விலை	127	115	95	100	

(மூவாண்டுச் சுழற்சியைக் (cycle) கொள்ளவும்—தசமத்தை நீக்கவும்.)

(எம். காம்.—அலகாபாத்—1943)

தீர்வு :

ஆண்டு	விற்பனைக்கு வரும் சரக்கு (Supply)				விலைகள்				விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	x	3 வருட நகரும் சராசரி	சராசரியிலிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	y	3 வருட நகரும் சராசரி	சராசரியிலிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y	
1921	80	—	—	—	146	—	—	—	—
1922	82	83	—1	1	140	139	—1	1	+ 1
1923	86	86	0	0	130	129	1	1	0
1924	91	87	4	16	117	127	10	100	+40
1925	83	86	—3	9	133	126	7	49	—21
1926	85	86	—1	1	127	125	2	4	— 2
1927	89	90	—1	1	115	112	3	9	— 3
1928	96	93	3	9	95	103	—8	64	—24
1929	93	—	—	—	100	—	—	—	—
		$n=7$	1	37		$n=7$	14	228	— 9

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left(\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right)\left(\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right)}}$$

$$= \frac{-9 - \frac{(1)(14)}{7}}{\sqrt{\left[37 - \frac{(1)^2}{7}\right]\left[228 - \frac{(14)^2}{7}\right]}}$$

$$= \frac{-9-2}{\sqrt{\left[36 \cdot 857 \times 200\right]}} = \frac{-11}{\sqrt{7371 \cdot 40}}$$

$$= \frac{-11}{85 \cdot 29}$$

$$= -0 \cdot 13$$

மேற்கண்ட கணக்கில் குறுகிய கால அலைவுகளுக்குக் கண்டு பிடிக்கப்பட்ட விற்பனைக்கு வரும் சரக்கிற்கும், விலைக்கும் இடையே எதிரிடை உடன் தொடர்பு காணப்படுகிறது.

மாதிரி 285

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் உள்ள சரக்குக் குறியீட்டெண்ணுக்கும், விற்பனை விலைக்கும் குறுகியகால அலைவுகளைக் கண்டு, அவற்றிற்கு உடன் தொடர்புக் கெழுவையும் கணக்கிடு.

ஆண்டு	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927
விற்பனைக்கு வரும் சரக்குக் குறியீட்டெண் X	91	98	95	92	93	96	102	107
விற்பனை விலை Y	117	97	102	108	105	96	77	68

ஆண்டு	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934
X	104	98	100	108	116	114	111
Y	77	93	89	83	78	84	93

(5 வருட சுழற்சியைக் கொள்ளவும்—தசமத்தை நீக்கிவிடவும்.)

தீர்வு :

விற்பனைக்கு வரும் சரக்கிற்கும் விலைக்கும் இடையே குறுகிய கால அலைவுகளைக் கணக்கிட்டு உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

ஆண்டு	விற்பனைக்கு வரும் சரக்கு (X)			
	குறியீடு X	5 வருட நகரும் சராசரி x	சராசரியிலிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2
1920	91	—	—	—
1921	98	—	—	—
1922	95	94	—1	1
1923	92	95	3	9
1924	93	96	3	9
1925	96	98	2	4
1926	102	100	—2	4
1927	107	101	—6	36
1928	104	102	—2	4
1929	98	103	5	25
1930	100	105	5	25
1931	108	107	—1	1
1932	116	110	—6	36
1933	114	—	—	—
1934	111	—	—	—
		$n=11$	0	154

ஆண்டு	விலை (Y)				விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	குறியீடு Y	5 வருட நகரும் சராசரி y	சராசரியிலிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	
1920	117	—	—	—	—
1921	97	—	—	—	—
1922	102	106	4	16	—4
1923	108	102	—6	36	—18
1924	105	98	—7	49	—21
1925	96	91	—5	25	—10
1926	77	85	8	64	—16
1927	68	82	14	196	—84
1928	77	81	4	16	—8
1929	93	82	—11	121	—55
1930	89	84	—5	25	—25
1931	83	85	2	4	—2
1932	78	85	7	49	—42
1933	84	—	—	—	—
1934	93	—	—	—	—
		$n=11$	5	601	—285

கண்டறிந்த ஜோடிகளின் எண்ணிக்கை $n=11$

உடன் தொடர்புக் கெழு

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]\left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

$$\therefore r = \frac{-285 - \frac{0 \times 5}{11}}{\sqrt{154 \times \left(601 - \frac{5 \times 5}{11}\right)}} = \frac{-285}{\sqrt{154 \times 598{\cdot}73}}$$

$$= \frac{-285}{303{\cdot}7} = -0{\cdot}938$$ (தோராயமாக)

ஆகவே, குறைந்த கால அலைவுகளுக்கு, விற்பனைக்கு வந்த சரக்குக் குறியீட்டெண்ணுக்கும், விலைக் குறியீட்டெண்ணுக்கும் எதிரிடை உடன் தொடர்பு உயரிய அளவில் இருப்பது காண்கிறோம். இது விற்பனைக்கு வரும் சரக்கின் அளவு அதிகரிக்கும் பொழுது விலை விழுகிறது என்றும், சரக்கின் வருகை அளவு குறையும்பொழுது விலை ஏற்றம் அடைகிறது என்பதையும் காட்டுகிறது.

மாதிரி 286

ஒரு விற்பனைப் பொருளின், விற்பனைக்கு வரும் அளவுக் குறியீட்டெண்ணையும், விலைக் குறியீட்டெண்ணையும் கீழே உள்ள பட்டியல் தருகிறது. முதலில் குறுகிய கால அலைவுகளைக் கணக்கிட்டு அதன்பின் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

ஆண்டு	விற்பனைக்கு வரும் சரக்குக் குறியீட்டெண்	விலைக் குறியீட்டெண்	ஆண்டு	விற்பனைக்கு வரும் சரக்குக் குறியீட்டெண்	விலைக் குறியீட்டெண்
1	186	222	9	154	204
2	168	228	10	192	192
3	156	232	11	210	186
4	166	216	12	216	184
5	178	200	13	204	190
6	186	196	14	194	196
7	154	208	15	234	182
8	136	214			

(எம். ஏ.—ராஜஸ்தான்—1951)

ஆண்டு	x வரிசை				y வரிசை				விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	x	5 வருட நகரும் சராசரி x	நகரும் சராசரியிலிருந்து விலக்கம் dx	விலக்க வர்க்கம் dx^2	y	5 வருட நகரும் சராசரி y	சராசரியிலிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y	
1	186	—	—	—	222	—	—	—	—
2	168	—	—	—	228	—	—	—	—
3	156	171	15	225	232	220	—12	144	—180
4	166	171	5	25	216	214	—2	4	121
5	178	168	—10	100	200	210	10	100	100
6	186	164	—22	484	196	207	11	121	—242
7	154	162	8	64	208	204	—4	16	—32
8	136	164	28	784	214	203	—11	121	—308
9	154	169	15	225	204	201	—3	9	—45
10	192	182	—10	100	192	196	4	16	—40
11	210	195	—15	225	186	191	5	25	—75
12	216	203	—13	169	184	190	6	36	—78
13	224	212	8	64	190	188	—2	4	—16
14	194	—	—	—	196	—	—	—	—
15	234	—	—	—	182	—	—	—	—
		$n=11$	9	2565		$n=11$	2	596	—1126

$$\text{சூத்திரம்} \quad r = \frac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \dfrac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]\left[\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

$$r = \frac{-1126 - \dfrac{9 \times 2}{11}}{\sqrt{\left[2565 - \dfrac{(9)^2}{11}\right]\left[596 - \dfrac{(2)^2}{11}\right]}}$$

$$= \frac{-1126 - 1\cdot64}{\sqrt{(2565 - 7\cdot36)(596 - \cdot36)}}$$

$$= \frac{-1127\cdot64}{\sqrt{2557\cdot64 \times 595\cdot64}} = \frac{-1127\cdot64}{1234\cdot27} = -0\cdot91$$

இங்கு, அதிக அளவில் எதிரிடை உடன் தொடர்பு இருத்தலைக் காணலாம்.

மாதிரி 287

சுழல் ஏற்ற இயக்கத்திற்கு (Cycle Fluctuation) உடன் தொடர்பு :

கீழேயுள்ள *X*, *Y* என்ற இரு வரிசைகளின் திட்ட விலக்கச் சுழற்சிகளுக்கு (for standard deviation cycle) உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

ஆண்டு		1845	1846	1847	1848	1849
திட்ட விலக்கச் சுழற்சி	*X* வரிசை	+1·2	—0·2	—1·0	—0·5	—0·4
	Y வரிசை	+1·1	—0·6	—1·1	0·1	—0·1
ஆண்டு		1850	1851	1852	1853	1854
திட்ட விலக்கச் சுழற்சி	*X* வரிசை	—0·1	—2·1	—0·3	+0·5	—0·8
	Y வரிசை	—0·3	—1·1	+0·1	+0·4	—0·4

தீர்வு : திட்ட விலக்கச் சுழற்சிகளின் உடன் தொடர்புக் கெழு கணக்கிடல் :

ஆண்டு	X-வரிசை திட்ட விலக்கச் சுழற்சி x	Y வரிசை திட்ட விலக்கச் சுழற்சி y	திட்ட விலக்கச் சுழற்சிகளின் பெருக்கல் $(x \times y)$
1845	+1·2	+1·1	+1.32
1846	—0·2	—0·6	+0·12
1847	—1·0	—1·1	+1·10
1848	—0·5	—0·1	+0·05
1849	—0·4	+0 1	+0·04
1850	—0·1	– 0·3	+0·03
1851	—2·1	—1·1	+2·31
1852	—0·3	+0·1	—0·03
1853	+0·5	+0·4	+0·20
1854	—0·8	—0·2	+0·32

உடன் தொடர்புக் கெழு $r = \frac{\Sigma x_y}{n} = \frac{5·38}{10} = \mathbf{0·538}$

மாதிரி 288

கீழே கொடுத்துள்ள பட்டியலில் தரப்பட்ட உற்பத்தி, வேலை வாய்ப்புகளின் திட்ட விலக்கச் சுழற்சிகளுக்கு உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் காண் :

ஆண்டு		1930	'31	'32	'33	'34	'35
திட்ட விலக்கச் சுழற்சிகள்	உற்பத்தி (σ) x	+0·46	+0·75	– 1·05	–0 48	+ 0·55	+·0·59
	வேலை வாய்ப்பு (σ) y	– 0·34	+ 1·20	+ 0·16	+ 0·37	+ 0·31	– 0·37
ஆண்டு		'36	'37	'38	'39	'40	'41
திட்ட விலக்கச் சுழற்சிகள்	உற்பத்தி (σ) x	– 0·61	– 0·23	+ 1·25	× 1·29	– 1·27	+ 0·82
	வேலை வாய்ப்பு (σ) y	– 0·75	– 0·41	+ 1·05	+ 1·66	– 0·90	+ 0·37

தீர்வு : திட்ட விலக்கச் சுழற்சிகளின் உடன் தொடர்புக் கணக்கிடல் :

ஆண்டு	உற்பத்தி (σ) x	வேலை வாய்ப்பு (σ) y	திட்ட விலக்கச் சுழற்சிகளின் பெருக்கல் xy
1930	+0·46	−0·34	−0·1564
1931	+0·75	+1·20	+0·9000
1932	−1·05	+0·16	+0·1680
1933	−0·48	+0·37	−0·1776
1934	+0·55	+0·31	+0·1705
1935	+0·59	−0·37	−0·2183
1936	−0·61	−0·75	+0·4576
1937	−0·23	−0·41	+0·0943
1938	+1·25	+1·05	+1·3125
1939	+1·29	+1·66	+2·1414
1940	−1·27	−0·90	+1·1430
1941	+0·82	+0·37	+0·3034
$n=12$			+5·8024

உடன் தொடர்புக் கெழு $r = \frac{\Sigma x_y}{n} = \frac{5{\cdot}8024}{12} = {\cdot}048353$

உடன் தொடர்பு அட்டவணை — தொகுப்பு வரிசைகள்
[Correlation Table—Grouped Series]
இடையுறவு = Correlation

மாதிரி 289

100 ஜோடி கணவன் மனைவிகளின் இடையேயுள்ள வயதுகளின் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது :

கணவன் வயது (வருடங்களில்)	மனைவிகளின் வயது (வருடங்களில்)					மொத்தம்
	10 – 20	20—30	30—40	40—50	50—60	
15—25	6	3	—	—	—	9
25—35	3	16	10	—	—	29
35—45	—	10	15	7	—	32
45—55	—	—	7	10	4	21
55—65	—	—	—	4	5	9
மொத்தம்	9	29	32	21	9	100

(ஐ.ஏ.எஸ்—1949)

கணவன்களின் வயது (ஆண்டுகளில்)		மனைவிகளின் வயது (ஆண்டுகளில்)									
		10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	மொத்தம்				
வயதுப்பிரிவு	மத்திய மதிப்பு	15	25	35	45	55	Li	dy	fdy	fdy^2	fdxdy
15-25	20	[4] 6 [24]	[2] 3 [6]	–	–	–	9	-2	-18	36	30
25-35	30	[2] 3 [6]	[1] 16 [16]	[0] 10 [0]	–	–	29	-1	-29	29	22
35-45	40	–	[0] 10 [0]	[0] 15 [0]	[0] 7 [0]	–	32	0	0	0	0
45-55	50	–	–	[0] 7 [0]	[1] 10 [10]	[2] 4 [8]	21	1	21	21	18
55-65	60	–	–	–	[2] 4 [8]	[4] 5 [20]	9	2	9	36	28
மொத்தம் f		9	29	32	21	9	100		-8	122	98
dx		-2	-1	0	1	2					
fdx		-18	-29	0	21	18	-8				
fdx^2		36	29	0	21	36	122				
fdxdy		30	22	0	18	28	98				

A = 35 ; B = 40 எனக் கொள்க

$$dx = \frac{x - 35}{10}$$

$$dy = \frac{y - 40}{10}$$

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y - (\Sigma f d_x)(\Sigma f d_y)}{\sqrt{\left(\Sigma f d_x^2 - \frac{(\Sigma f d_x)^2}{\Sigma f}\right)\left(\Sigma f d_y^2 - \frac{(\Sigma f d_y)^2}{\Sigma f}\right)}}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து :

$\Sigma f = 100$; $\Sigma f d_x = -8$; $\Sigma f d_x^2 = 122$; $\Sigma f d_y = -8$;
$\Sigma f d_y^2 = 122$; $\Sigma f d_x d_y = 98$

$$\therefore r = \frac{98 - \frac{(-8)^2 \times (-8)}{100}}{\sqrt{\left(122 - \frac{(-8)^2}{100}\right)\left(122 - \frac{(-8)^2}{100}\right)}}$$

$$= \frac{98-0{\cdot}64}{122-0{\cdot}64}$$

$$= \frac{97{\cdot}36}{121{\cdot}36} = +0{\cdot}802 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

ஆதலால் மேற்கண்ட கணக்கில் அதிக அளவு நேரிடை இடையுற காணப்படுவதைக் காணலாம்.

மாதிரி 290

பொருளாதாரம், புள்ளியியல் பாடங்களில் 25 மாணவர்கள் எடுத்த வெவ்வேறுமதிப்பெண்களைக் கீழ்வரும் பட்டியல் தருகிறது.

பொருளாதார மதிப்பெண்கள்	புள்ளியியல் மதிப்பெண்கள்				மொத்தம்
	30—40	40—50	50—60	60—70	
30—40	3	1	1	—	5
40—50	2	6	1	2	11
50—60	1	2	2	1	6
60—70	—	1	1	1	3
மொத்தம்	6	10	5	4	25

மேற்கண்ட இரு பாடங்களில் எடுத்துள்ள மதிப்பெண்களுக்கிடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

(பி.காம்.—சென்னை—1955)

தீர்வு :

இடையுறவுக் கெழு கணக்கிடல் :

பொருளாதார மதிப்பெண்கள்		புள்ளியியல் பாட மதிப்பெண்கள் 30-40	40-50	50-60	60-70					
பிரிவு	மத்திய மதிப்பு	35	45	55	65	மொத்தம் f	dy	fdy	fdy^2	fdx dy
30-40	35	[1] 3 [3]	[0] 1 [0]	[-1] 1 [-1]	—	5	-1	-5	5	2
40-50	45	[0] 2 [0]	[0] 6 [0]	[0] 1 [0]	[0] 2 [0]	11	0	0	0	0
50-60	55	[-1] 1 [-1]	[0] 2 [0]	[1] 2 [2]	[2] 1 [2]	6	1	6	6	3
60-70	65	—	[0] 1 [0]	[2] 1 [2]	[4] 1 [4]	3	2	6	12	6
மொத்தம் f :		6	10	5	4	25	—	7	23	11
dx		-1	0	1	2	—				
fdx		-6	0	5	8	7				
fdx^2		6	0	5	16	27				
fdxdy		2	0	3	6	11				

A = 45 ; B = 45 எனக் கொள்க

$$dx = \frac{x-45}{10}$$

$$dy = \frac{x-45}{10}$$

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுவை, இடையுறவு அட்டவணையிலிருந்து பெற உபயோகப்படுத்தப்படும் சூத்திரம் :

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y - \frac{(\Sigma f d_x)(\Sigma f d_y)}{(\Sigma f)}}{\sqrt{\left[\Sigma f d_x^2 - \frac{(\Sigma f d_x)^2}{(\Sigma f)}\right]\left[\Sigma f d_y^2 - \frac{(\Sigma f d_y)^2}{(\Sigma f)}\right]}}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க்காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$\Sigma f = 25, \Sigma f d_x = 7, \Sigma f d_x^2 = 27,$$
$$\Sigma f d_y = 7, \Sigma f d_y^2 = 23, \Sigma f d_x d_y = 11$$

$$= \frac{11 - \frac{7 \times 7}{25}}{\sqrt{\left[27 - \frac{(7)^2}{25}\right]\left[23 - \frac{(7)^2}{25}\right]}}$$

$$= \frac{11-2}{(27-2)\times(23-2)}$$

$$= \frac{9}{5\sqrt{21}}$$

$$= \frac{1 \cdot 80}{4 \cdot 58} = +\,0 \cdot 38$$ (தோராயமாக)

பொருளாதாரம், புள்ளியியல் பாடங்களில் வாங்கிய மதிப் பெண்களின் இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழு +0·36 எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 291

கீழ்க்காணும் அட்டவணை வெவ்வேறு உயரமும், எடையும் உடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் கொடுக்கிறது :

உயரம் (அங்குலத்தில்)	எடை (பவுண்டில்)					மொத்தம்
	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	
50—55	1	3	7	5	2	18
55—60	2	4	10	7	4	27
60—65	1	5	12	10	7	35
65—70	—	3	8	6	3	20
மொத்தம்	4	15	37	28	16	100

உயரத்திற்கும் எடைக்கும் இடையே ஏதாவது உறவைக் காண்கிறுயா ? (எம்.ஏ.—சென்னை—1953)

தீர்வு :

உயரம் (அங்குலத்தில்)		எடை - பவுண்டில் -									
		80-90	90-100	100-110	110-120	120-130					
உயரப் பிரிவு	மத்திய மதிப்பு	85	95	105	115	125	மொத்தம் f	dy	fdy	fdy²	fdx dy
50-55	52·5	[2] 1 [2]	[1] 3 [3]	[0] 7 [0]	[1] 5 [-5]	[-2] 2 [-4]	18	1	-18	18	-4
55-60	57·5	[0] 2 [0]	[0] 4 [0]	[0] 10 [0]	[0] 7 [0]	[0] 4 [0]	27	0	0	0	0
60-65	62·5	[-2] 1 [-2]	[-1] 5 [-5]	[0] 12 [0]	[1] 10 [10]	[2] 7 [14]	35	1	35	35	17
65-70	67·5	—	[-2] 3 [-6]	[0] 8 [0]	[2] 6 [12]	[4] 3 [12]	20	2	40	80	18
மொத்தம் f		-4	15	37	28	16	100	—	57	13	31
dx		-2	-1	0	1	2	—				
fdx		-8	-15	0	28	32	37				
fdx²		16	15	0	28	64	123				
fdxdy		0	-8	0	17	22	31				

A = 105; B = 57·5 எனக் கொள்க

$$dx = \frac{x - 105}{10}$$

$$dy = \frac{y - 57.5}{5}$$

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம்

$$r = \frac{\Sigma fd_xd_y - \dfrac{(\Sigma fd_x)(\Sigma fd_y)}{(\Sigma f)}}{\sqrt{\left[\Sigma fd_x^2 - \dfrac{(\Sigma fd_x)^2}{\Sigma f}\right]\left[\Sigma fd_y^2 - \dfrac{(\Sigma fd_y)^2}{(\Sigma f)}\right]}}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்வரும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$\Sigma f = 100 ; \quad \Sigma fd_x = 37 ; \quad \Sigma fd_x^2 = 123 ; \quad \Sigma fd_xd_y = 31$$
$$\Sigma fd_y = 57 : \quad \Sigma fd_y^2 = 13.$$

$$r = \frac{31 - \frac{37 \times 57}{100}}{\sqrt{\left[123 - \frac{(37)^2}{100}\right]\left[133 - \frac{(57)^2}{100}\right]}}$$

$$= \frac{31 - 21{\cdot}09}{\sqrt{(123 - 13{\cdot}69) \times (133 - 32{\cdot}49)}}$$

$$= \frac{9{\cdot}91}{\sqrt{109{\cdot}31 \times 100{\cdot}51}} = \frac{9{\cdot}91}{10{\cdot}3 \times 100} = \frac{9{\cdot}91}{103}$$

$$= + 0{\cdot}09$$

இங்கு, $r = 0{\cdot}09$ ஆக, மிகச் சிறிய எண்ணாக இருப்பதால் மாணவர்களின் உயரத்திற்கும் எடைக்கும் இடையே இடையுறவு இல்லை என அறிகிறோம்.

மாதிரி 292

கீழ்க் காணும் இடையுறவு அட்டவணை 1941ஆம் வருட மக்கள் தொகைக் கணிப்பின்படி 53 மணமக்களின் வயதைக் கொடுக்கிறது. கணவன் வயதிற்கும் மனைவி வயதிற்கும் இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

கணவன் வயது	மனைவி வயது						மொத்தம்
	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	
15–25	1	1	—	—	—	—	2
25–35	2	12	1	—	—	—	15
35–45	—	4	10	1	—	—	15
45–55	—	—	3	6	1	—	10
55–65	—	—	—	2	4	2	8
65–75	—	—	—	—	1	2	3
மொத்தம்	3	17	14	9	6	4	53

(ஐ. ஏ. எஸ்.—1950)

தீர்வு : இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

கணவன் வயது (y - வரிசை)		மனைவி வயது (x - வரிசை) 15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75					
வயதுப் பிரிவு	மத்திய மதிப்பு	20	30	40	50	60	70	மொத்தம் f	dy	fdy	fdy²	fdx dy
15-25	20	[4] 1 [4]	[2] 1 [2]	–	–	–	–	2	-2	-4	8	6
25-35	30	[2] 2 [4]	[1] 12 [12]	[0] 1 [0]	–	–	–	15	-1	-15	15	16
35-45	40	–	[0] 4 [0]	[0] 10 [0]	[0] 1 [0]	–	–	15	0	0	0	0
45-55	50	–	–	[0] 3 [0]	[1] 6 [6]	[2] 1 [2]	–	10	1	10	10	8
55-65	60	–	–	–	[2] 2 [4]	[4] 4 [16]	[6] 2 [12]	8	2	16	32	32
65-75	70	–	–	–	–	[6] 1 [6]	[9] 2 [18]	3	3	9	27	24
மொத்தம் f		3	17	14	9	6	4	53	–	16	92	86
dx		-2	-1	0	1	2	3	–				
fdx		-6	-17	0	9	12	12	10				
fdx²		12	17	0	9	24	36	98				
fdxdy		8	14	0	10	24	30	86				

$$dx = \frac{x-40}{10} \qquad dy = \frac{y-40}{10}$$

கார்ல் பியர்சனின் தொகுப்பு வரிசைகளுக்கு இடையுறவுக் கெழு :

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y - \frac{(\Sigma f d_x)(\Sigma f d_y)}{(\Sigma f)}}{\sqrt{\left[\Sigma f d_x^2 - \frac{(\Sigma f d_x)^2}{\Sigma f}\right]\left[\Sigma f d_y^2 - \frac{(\Sigma f d_y)^2}{(\Sigma f)}\right]}}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து,

$$n = \Sigma f = 53 ; \quad \Sigma f d_x = 10 ; \quad \Sigma f d_x^2 - 98 ;$$
$$\Sigma f d_y = 16 ; \quad \Sigma f d_y^2 = 92 ; \quad \Sigma f d_x d_y = 86$$

ஆகியவற்றை அடைகிறோம்.

$$\therefore \quad r = \frac{86 - \frac{10 \times 16}{53}}{\sqrt{\left[98 - \frac{(10)^2}{53}\right]\left[92 - \frac{(16)^2}{53}\right]}}$$

$$= \frac{86-3}{\sqrt{\left(98 - \frac{100}{53}\right)\left(92 - \frac{256}{53}\right)}}$$

$$= \frac{83}{\sqrt{(98-2) \times (92-5)}}$$

$$= \frac{83}{\sqrt{96 \times 87}} \qquad = 0 \cdot 908$$

கணவன் மனைவியர் வயதுகளுக்கிடையே $r = 0 \cdot 908$ என்பது அதிக அளவு நேரிடை இடையுறவைக் காண்பிக்கிறது.

மாதிரி 293

கீழ்க்காணும் அட்டவணை 67 மாணவர்களின் வயதுப் பிரிவிற்கு ஏற்றார்போல் அறிவுப் போட்டியில் (Intelligence test) எடுத்த மதிப்பெண்களின் அலைவெண்களைக் கொண்டுள்ளது.

தேர்வு மதிப்பெண்கள்	வயது — ஆண்டுகளில்				மொத்தம்
	18	19	20	21	
200—250	4	4	2	1	11
250—300	3	5	4	2	14
300—350	2	6	8	5	21
350—400	1	4	6	10	21
மொத்தம்	10	19	20	18	67

வயதிற்கும் அறிவிற்கும் ஏதாவது உறவு உண்டா?

(பி.காம்.—சென்னை—1952)

தீர்வு : வயதிற்கும் அறிவிற்கும் இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழு 'r'ஐக் கணக்கிடல் :

தேர்வு மதிப்பெண் ஒ - வரிசை		வயது (ஆண்டுகளில்) x – வரிசை 18	19	20	21					
பிரிவு மதிப்பெண்	மத்திய மதிப்பு	18	19	20	21	மொத்தம் f	dy	fdy	fdy²	fdx dy
200-250	225	[4] 16 [4]	[2] 4 [8]	[0] 2 [0]	[-2] 1 [-2]	11	-2	-22	44	22
250-300	275	[2] 3 [6]	[1] 5 [5]	[0] 4 [0]	[-1] 2 [-2]	14	-1	-14	14	9
300-350	325	[0] 2 [0]	[0] 6 [0]	[0] 8 [0]	[0] 5 [0]	21	0	0	0	0
350-400	375	[-2] 1 [-2]	[-1] 4 [-4]	[0] 6 [0]	[1] 10 [10]	21	1	21	21	4
மொத்தம் f		10	19	20	18	67	—	-15	79	35
dx		-2	-1	0	1	—				
fdx		-20	-19	0	18	-21				
fdx²		40	19	0	18	77				
fdxdy		20	9	0	6	35				

$$dx = \frac{x - 20}{1}$$

$$dy = \frac{y - 325}{50}$$

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம்

$$r = \frac{\Sigma\, d_x d_y - \dfrac{(\Sigma f d_x)\,(\Sigma f d_y)}{\Sigma f}}{\sqrt{\left[\Sigma f d_x^2 - \dfrac{(\Sigma f d_x)^2}{\Sigma f}\right]\left[\Sigma f d_y^2 - \dfrac{(\Sigma f d_y)^2}{\Sigma f}\right]}}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க் காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம் :

$\Sigma f = 67;\ \ \Sigma fd_x = -21;\ \ \Sigma fd_x^2 = 77;$

$\Sigma fd_y = -15;\ \ \Sigma fd_y^2 = 79;\ \ \Sigma fd_x d_y = 35.$

$$\therefore r = \frac{35 - \frac{(-21)(-15)}{67}}{\sqrt{\left[77 - \frac{(-21)^2}{67}\right]\left[79 - \frac{(-15)^2}{67}\right]}}$$

$$= \frac{35 - \frac{315}{67}}{\sqrt{\left(77 - \frac{441}{67}\right)\left(79 - \frac{225}{67}\right)}} = \frac{30{\cdot}3}{\sqrt{70{\cdot}4 \times 75{\cdot}65}}$$

$$= \frac{30{\cdot}3}{72{\cdot}97} = \mathbf{0{\cdot}415}$$

இடையுறவுக் கெழுவின் ஊகப் பிழை (Probable Error)

$= 0{\cdot}6745\ \frac{(1 - r^2)}{\sqrt{n}} = {\cdot}6745\frac{[1-(415)^2]}{\sqrt{67}} = {\cdot}06826$ (தோராயமாக)

இடையுறவு r ஆறு மடங்கு ஊகப் பிழையைவிட அதிகமாக இருப்பதால் இங்கு இடையுறவு சிறப்பாக இருக்கிறது. வயது கூடுதலால், அறிவும் கூடுகிறது எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 294

கீழே மறுமுறை பிரசுரிக்கப்பட்ட விவரங்களடங்கிய அட்டவணையிலுள்ள மீரட் மாவட்டத்தின் 66 கிராமங்களின் 'மொத்தப் பயிரிடக்கூடிய நிலப்பரப்பிற்கும்', 'கோதுமை பயிரிட்ட நிலப்பரப்பிற்கும்' இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

கோதுமை பயிரிட்ட நிலப்பரப்பு	மொத்தப் பயிரிடக் கூடிய நிலப்பரப்பு (பிக்காகளில்)					மொத்தம்
	0–	500–	1000–	1500–	2000–2500	
0—	12	6	—	—	—	18
200—	2	18	4	2	1	27
400—	—	4	7	3	—	14
600—	—	1	—	2	1	4
800—1000	—	—	—	1	2	3
மொத்தம்	14	29	11	8	4	66

(ஐ. ஏ.எஸ்.—1949)

தீர்வு : இடையுறவுக் கெழு ‘r’ ஐக் கணக்கிடல் :

கோதுமை பயிரிடப்பட்ட நிலப்பரப்பு (பிக்காவில்)		மொத்த பயிரிடும் நிலப்பரப்பு (பிக்காவில்) 0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500					
பிரிவு	மத்திய மதிப்பு	250	750	1250	1750	2250	மொத்தம் f	dy	fdy	fdy^2	fdxdy
0-200	100	[4] 12 [48]	[2] 6 [12]	–	–	–	18	-2	-36	72	60
200-400	300	[2] 2 [4]	[1] 18 [18]	[0] 4 [0]	[-1] 2 [-2]	[-2] 1 [-2]	27	-1	-27	27	18
400-600	500	–	[0] 4 [0]	[0] 7 [0]	[0] 3 [0]	–	14	0	0	0	0
600-800	700	–	[-1] 1 [-1]	–	[1] 2 [2]	[2] 1 [2]	4	1	4	4	3
800-1000	900	–	–	–	[2] 1 [2]	[4] 2 [8]	3	2	6	12	10
மொத்தம் f		14	29	11	8	4	66	–	-53	115	91
dx		-2	-1	0	1	2	–				
fdx		-28	-29	0	8	8	-41				
fdx^2		56	29	0	8	16	109				
fdxdy		52	29	0	9	8	91				

$$dx = \frac{x - 1250}{500}$$

$$dy = \frac{Y - 500}{200}$$

இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம்,

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y - \frac{(\Sigma f d_x)(\Sigma f d_y)}{(\Sigma f)}}{\sqrt{\left[\Sigma f d_x^2 - \frac{(\Sigma f d_x)^2}{\Sigma f}\right]\left[\Sigma f d_y^2 - \frac{(\Sigma f d_y)^2}{\Sigma f}\right]}}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க்காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$\Sigma f = 66$; $\Sigma f d_x = -41$; $\Sigma f d_x^2 = 109$;

$\Sigma f d_y = -53$; $\Sigma f d_y^2 = 115$; $\Sigma f d_x d_y = 91.$

$$\therefore \quad r = \frac{91 - \frac{(-41)(-53)}{66}}{\sqrt{\left[109 - \frac{(-91^2)}{66}\right] \times \left[115 - \frac{(-53)^2}{66}\right]}}$$

$$= \frac{91 - 33}{\sqrt{(109 - 25{\cdot}5) \times (115 - 42{\cdot}5)}}$$

$$= \frac{58}{\sqrt{83{\cdot}5 \times 72{\cdot}5}}$$

$$= \frac{58}{9{\cdot}1 \times 8{\cdot}4}$$

$$= 0{\cdot}75$$

ஆகவே, இடையுறவுக் கெழு $r = 0{\cdot}75$ (நேரிடையுறவு)

மாதிரி 295

கீழ்க்காணும் x, y வரிசைகளின் இடையுறவுத் தொகுப்பு அட்டவணைக்கு 'r'-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக :

Y வரிசை	X-வரிசை					மொத்தம்
	45—49	40—44	35—39	30—33	25—29	
40–49	1	—	—	—	—	1
30–39	—	2	1	—	—	3
20–29	—	3	3	2	—	8
10–19	—	—	4	2	—	6
0– 9	—	—	—	1	1	2
மொத்தம்	1	5	8	5	1	20

(பி.காம்.—ஆக்ரா—1942)

இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

Y-வரிசை		X-வரிசை									
		45–49	40–45	35–39	30–35	25–29	மொத்தம்				
பிரிவுகள்	மத்திய மதிப்பு	47	42	37	32	27	f	d_y	fd_y	fd_y^2	$fd_x \times d_y$
40—49	44·5	1	—	—	—	—	1	2	2	4	4
30—39	34·5	—	2	1	—	—	3	1	3	3	2
20—29	24·5	—	3	3	2	—	8	0	0	0	0
10—19	14·5	—	—	4	2	—	6	—1	—6	6	2
0— 9	4·5	—	—	—	1	1	2	—2	—4	8	6
மொத்தம் f		1	5	8	5	1	20	—	—5	21	14
d_x		2	1	0	—1	—2	—				
fd_x		2	5	0	—5	—2	—				
fd_x^2		4	5	0	5	4	18				
fd_xd_y		4	2	0	4	2	14				

$$d_x = \frac{x - 37}{5}$$

$$d_y = \frac{y - 245}{10}$$

இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$r = \frac{\Sigma fd_xd_y - \frac{(\Sigma fd_x)(\Sigma fd_y)}{\Sigma f}}{\sqrt{\left[\Sigma fd_x^2 - \frac{(\Sigma fd_x)^2}{\Sigma f}\right] \times \left[\Sigma fd_y^2 - \frac{(\Sigma fd_y)^2}{(\Sigma f)}\right]}}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து

$\Sigma f = 20$; $\Sigma fd_x = 0$; $\Sigma fd_x^2 = 18$

$\Sigma fd_y = -5$; $\Sigma fd_y^2 = 8$; $\Sigma fd_xd_y = 6$.

$$\therefore r = \frac{14 - \frac{(0)\times(-5)}{20}}{\sqrt{\left[18 - \frac{(0)^2}{20}\right] \times \left[21 - \frac{(-5)^2}{20}\right]}}$$

$$= \frac{14-0}{\sqrt{(18-0)\times(21-1{\cdot}25)}}$$

$$= \frac{14}{\sqrt{18\times 19{\cdot}85}} = \frac{14}{\sqrt{355{\cdot}5}} = \frac{14}{18{\cdot}9}$$

$= 0{\cdot}74$ (தோராயமாக).

மாதிரி 296

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் தரப்பட்ட தேனிரும்பிற்கும் (போக்கின் சதவீதம் 1897—1913) தொழில் உற்பத்திக்கும் (போக்கின் சதவீதம் : 1897—1913) இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழு 'r' ஐக் கணக்கிடு.

தொழில் உற்பத்தி	தேனிரும்பு உற்பத்தி								மொத்தம்
	50—60	60—70	70—80	80—90	90—100	100—110	110—120	120—130	
120—130								15	15
110—120						6	34	1	41
100—110					5	51	6		62
90—100				3	33	1	2		37
80—90			2	24	3				29
70—80			7						9
60—70		2	1						3
50—60	6	2							8
மொத்தம்	6	4	10	29	41	58	40	16	204

(எம். ஏ.—கல்கத்தா—1936)

தீர்வு :

இடையுறவுக் கெழு கணக்கிடல் :

தொழில் உற்பத்தி Y-வரிசை		தேனிரும்பு உற்பத்தி X-வரிசை												
		50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130					
பிரிவு	மத்திய மதிப்பு	55	65	75	85	95	105	115	125	மொத்தம் f	dy	fdy	fdy^2	fdx dy
120-130	125	–	–	–	–	–	–	–	15	15	-2	-30	60	90
110-120	115	–	–	–	–	–	[1] 6 [6]	[2] 34 [68]	[3] 1 [3]	41	1	41	41	77
100-110	105	–	–	–	–	[0] 5 [0]	[0] 51 [0]	[0] 6 [0]	–	62	0	0	0	0
90-100	95	–	–	–	[1] 3 [3]	[0] 33 [0]	[-1] 1 [-1]	–	–	37	-1	37	37	2
80-90	85	–	–	[4] 2 [8]	[2] 24 [48]	[0] 3 [0]	–	–	–	29	-2	-58	116	56
70-80	75	–	–	[6] 7 [42]	[3] 2 [6]	–	–	–	–	9	-3	-27	81	48
60-70	65	–	[12] 2 [24]	[8] 1 [8]	–	–	–	–	–	3	-4	-12	48	32
50-60	55	[20] 6 [120]	[15] 2 [30]	–	–	–	–	–	–	8	-5	-40	200	150
மொத்தம் f		6	4	10	29	41	58	40	16	204	–	Σfdy =103	Σfd^2y =583	Σfdxdy =455
dx		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3					
fdx		-24	-12	-20	-29	0	58	80	48	Σfdx =101				
fdx^2		96	36	40	29	0	58	160	144	Σfd^2x =563				
fdxdy		120	4	58	57	0	5	68	93	Σfdxdy =455				

$$dx = \frac{x - 95}{10}$$

$$dy = \frac{y - 105}{10}$$

$$\text{ஆகவே, } r = \frac{\Sigma f d_x d_y - \dfrac{(\Sigma f d_x)\,(\Sigma f d_y)}{n}}{\left\{\left[\Sigma f d_x{}^2 - \dfrac{(\Sigma f d_x{}^2)}{n}\right]\left[\Sigma f d_y{}^2 - \dfrac{(\Sigma f d_y)^2}{n}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{455 - \dfrac{101 \times -103}{204}}{\sqrt{563 - \dfrac{(101)^2}{204}} - \sqrt{583 - \dfrac{(-103)^2}{204}}}$$

$$= \frac{455 + 51}{\sqrt{513 \times 531}}$$

$$= \frac{506}{\sqrt{272403}}$$

$$= \frac{506}{521 \cdot 9}$$

$$= \mathbf{0 \cdot 968}$$

இது தேனிரும்பு உற்பத்திக்கும் தொழில் உற்பத்திக்கும் இடையே உயரிய அளவு நேரிடை உடன் தொடர்பு உள்ளது என்பதைக் காட்டுகிறது.

மாதிரி 297

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

Y-வரிசை	X-வரிசை									மொத்தம்
	94.5	96.5	98·5	100·5	102·5	104·5	106·5	108·5	110·5	
29·5	—	4	3	—	4	1	—	—	1	13
59·5	1	3	6	18	6	9	2	3	1	49
89·5	7	3	16	16	4	4	1	—	1	52
119·5	5	9	10	9	2	—	1	2	—	38
149·5	3	5	8	—	—	1	—	—	—	18
179·5	4	2	3	1	—	—	—	—	—	10
209·5	4	4	—	1	—	—	—	—	—	9
239·5	1	1	—	—	—	—	—	—	—	2
மொத்தம்	25	31	46	46	16	15	4	5	3	191

(எம், எஸ்ஸி.)

தீர்வு : இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

Y- வரிசை	X - வரிசை									மொத்தம் f	dy	fdy	fdy²	fdxdy
மத்திய மதிப்பு	94·5	96·5	98·5	100·5	102·5	104·5	106·5	108·5	110·5					
29·5	–	[9] 4 [36]	[6] 3 [18]	–	[0] 4 [0]	[-3] 1 [-3]	–	–	1	13	-3	-39	117	39
59·5	1	[6] 3 [18]	[4] 6 [24]	[2] 18 [36]	[0] 6 [0]	[-2] 9 [-18]	[-4] 2 [-8]	[-6] 3 [-12]	[-8] 1 [-8]	49	-2	-98	196	40
89·5	[4] 7 [28]	[3] 3 [9]	[2] 16 [32]	[1] 16 [16]	[0] 4 [0]	[-1] 4 [-4]	[-2] 1 [-2]	–	[4] 1 [4]	52	-1	-52	52	75
119·5	[0] 5 [0]	[0] 9 [0]	[0] 10 [0]	[0] 9 [0]	[0] 2 [0]	–	[0] 1 [0]	[0] 2 [0]	–	38	0	0	0	0
149·5	[-4] 3 [-12]	[-3] 5 [-15]	[-2] 8 [-16]	[-1] 1 [-1]	–	[1] 1 [1]	–	–	–	18	1	18	18	-43
179·5	[-8] 4 [-32]	[-6] 2 [-12]	[-4] 3 [-12]	[-2] 1 [-2]	–	–	–	–	–	10	2	20	40	-58
209·5	[-12] 4 [-48]	[-9] 4 [-36]	–	[-3] 1 [-3]	–	–	–	–	–	9	3	27	81	-87
239·5	[-16] 1 [-16]	[-12] 1 [-12]	–	–	–	–	–	–	–	2	4	8	32	-28
மொத்தம் f	25	31	46	46	16	15	4	5	3	191		-116	539	(-62)
dx	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4					
fdx	-100	-93	-92	-46	0	15	8	15	12	-281				
fdx²	400	279	184	46	0	15	16	45	48	1033				
fdxdy	-72	-12	46	46	0	-24	-10	-12	-24	(-62)				

$$dx = \frac{x - 102.5}{2}$$

$$dy = \frac{y - 119.5}{30}$$

தீர்வு :

மேற்கண்ட பட்டியலிருந்து கீழ்க்காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம் :

$\Sigma f = 191$; $\Sigma fd_x = 281$; $\Sigma fd_x{}^2 = 1033$; $\Sigma fd_y = -116$
$\Sigma fd_y{}^2 = 536$: $\Sigma fd_x d_y = -62$,

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழு காணும் சூத்திரம்,

$$r = \frac{\Sigma f d_x\, d_y - \dfrac{(\Sigma f d_x)\,(\Sigma f d_y)}{(\Sigma f)}}{\sqrt{\left\{\Sigma f d_x^2 - \dfrac{(\Sigma f d_x)^2}{(\Sigma f)}\right\}\left\{\Sigma f d_y^2 - \dfrac{(\Sigma f d_y)^2}{(\Sigma f)}\right\}}}$$

$$= \frac{-62 - \dfrac{(-281)\,(-116)}{191}}{\sqrt{\left\{1033 - \dfrac{(-281)^2}{191}\right\}\left\{536 - \dfrac{(-116)^2}{(9)}\right\}}}$$

$$= \frac{11842 - 32596}{\sqrt{118342 \times 88920}} \qquad = -\frac{20754}{102581}$$

$$= -0{\cdot}2 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி 298

கீழ்க்காணும் விவரங்களடங்கிய அட்டவணையிலிருந்து 'மோட்டார் வண்டியின் வேகத்திற்கும்', 'நிறுத்துமிடத்திற்கு முன் தடையை அழுத்திய பின்பு வண்டி சென்று நின்ற இடைவெளித் தூரத்துக்கும்' இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

வேகம் மைல்/1 மணி நேரம்	வண்டி சென்று நின்ற தூரம் (அடியில்)									மொத்தம்
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	
0—5	1	1	1							3
5—10		2	3	2						7
10—15		1	3	4	2					10
15—20			2	5	5	2	1			15
20—25				4	6	6	4	3		23
25—30				1	7	5	3	2		18
30—35					2	4	4	2		12
35—40						2	4	1	1	8
40—45							2	1	1	4
மொத்தம்	1	4	9	16	22	19	18	9	2	100

(எம்.எஸ்ஸி-சென்னை—1962)

தீர்வு :

இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

வேகம் மைல் மணிக்கு Y- வரிசை		வண்டி சென்று நின்ற தூரம் (அடியில்) X- வரிசை													
		0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45					
பிரிவு	மத்திய மதிப்பு	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	மொத்தம் f	dy	fdy	fdy²	fdxdy
0-5	2.5	(16) 1 (16)	(12) 1 (12)	(8) 1 (8)	–	–	–	–	–	–	3	-4	-12	48	36
5-10	7.5	–	(9) 2 (18)	(6) 3 (18)	(3) 2 (6)	–	–	–	–	–	7	-3	-21	63	42
10-15	12.5	–	(6) 1 (6)	(4) 3 (12)	(2) 4 (8)	(0) 2 (0)	–	–	–	–	10	-2	20	40	26
15-20	17.5	–	–	(2) 2 (4)	(1) 5 (5)	(0) 5 (0)	(1) 2 (2)	(2) 1 (2)	–	–	15	-1	-15	30	5
20-25	22.5	–	–	–	(0) 4 (0)	(0) 6 (0)	(0) 6 (0)	(0) 4 (0)	(0) 3 (0)	–	23	0	0	0	0
25-30	27.5	–	–	–	(-1) 1 (-1)	(0) 7 (0)	(1) 5 (5)	(2) 3 (6)	(3) 2 (6)	–	18	1	18	18	16
30-35	32.5	–	–	–	–	(0) 2 (0)	(2) 4 (8)	(4) 4 (16)	(6) 2 (12)	–	12	2	24	48	36
35-40	37.5	–	–	–	–	–	(3) 2 (6)	(6) 4 (24)	(9) 1 (9)	(12) 1 (12)	8	3	24	72	51
40-45	42.5	–	–	–	–	–	–	(8) 2 (16)	(12) 1 (12)	(16) 1 (16)	4	4	16	64	44
மொத்தம் f		1	4	9	16	22	19	18	9	2	100		14	383	256
dx		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4					
fdx		-4	-12	-18	-16	0	19	36	27	8	40				
fdx²		16	36	36	16	0	19	72	81	32	308				
fdxdy		16	36	42	18	0	17	60	39	28	256				

$$dx = \frac{x - 22.5}{5}$$

$$dy = \frac{y - 22.5}{5}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க் காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$\Sigma f = 214\,;\quad \Sigma f d_x = -215\,;\quad f d_x^2 = 987\,;$$

$$\Sigma f d_y = 373\,;\ \Sigma f d_y^2 = 1773\,;\ \Sigma f d_x d_y = 323.$$

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழு காணும் சூத்திரம்.

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y - \frac{(\Sigma f d_x)(\Sigma f d_y)}{\Sigma f}}{\sqrt{\left[\Sigma f d_x - \frac{(\Sigma f d_x)^2}{(\Sigma f)}\right]\left[\Sigma f d_x - \frac{(\Sigma f d_y)^2}{(\Sigma f)}\right]}}$$

$$= \frac{323 - \frac{(-215)(373)}{214}}{\sqrt{\left[987 - \frac{(-215)^2}{214}\right]\left[1773 - \frac{(373)^2}{214}\right]}}$$

$$= \frac{69122 + 80195}{\sqrt{164993 \times 240293}}$$

$$= \frac{149317}{\sqrt{3{,}96{,}46{,}66{,}29{,}49}}$$

$$= \frac{149317}{199114}$$

$$= 0{\cdot}75$$

மாதிரி 299

கீழ்க் காணும் அட்டவணை 214 இடையில்லா மாதிரிக் கூறு நிலப் பிரிவுகளில் உபயோகப்படுத்தப்பட்ட குறிப்பிட்ட உர அளவுகளுக்கும் (ஒவ்வோர் ஏக்கருக்கும் பவுண்டுகளில்) அறுவடை செய்யப்பட்ட கோதுமை மகசூலின் அளவிற்கும் (புஸ்செல்களில்) உள்ள உறவைக் காட்டுகிறது. இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

ஓர் ஏக்கருக்குக் கோதுமை மகசூல் (புஸ் செல்களில்)	ஓர் ஏக்கருக்கு உர அளவு (பவுண்டில்)									மொத்தம்
	0—20	20—40	40—60	60—80	80—100	100—120	120—140	140—160	160—180	
0 — 4	9									9
4 — 8	11									11
8 —12	4	6								10
12—16		9								9
16—20		13								13
20—24			14							14
24—28			17	20						37
28—32			2	21	22	9	5	2		61
32—36				6	17	13	5	6	3	50
மொத்தம்	24	28	33	47	39	22	10	8	3	214

தர வரிசை இடையுறவு
[Rank Correlation]

மாதிரி 300

A, B என்ற இரு பாடங்களில் பத்து மாணவர்களின் தர வரிசை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தர வரிசை இடையுறவு என்ன ?

பாடம் *A*	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
பாடம் *B*	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

தீர்வு :

தர வரிசை இடையுறவைக் கணக்கிடல் :

பாடம் A தர வரிசை	பாடம் B தர வரிசை	தர வரிசை விலக்கம் d	தர வரிசை விலக்க வர்க்கம் d^2
3	6	-3	9
5	4	1	1
8	9	-1	1
4	8	-4	16
7	1	6	36
10	2	8	64
2	3	-1	1
1	10	-9	81
6	5	1	1
9	7	2	4
		0	214

மேலேயுள்ள பட்டியலில் ;

$$\Sigma d = 0; \quad \Sigma d^2 = 214.$$

தரவரிசை இடையுறவுக் கெழு $r = 1 - \frac{6\,(\Sigma d^2)}{n\,(n^2-1)}$

$$r = 1 - \frac{6 \times 214}{10\,(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{214}{165} = -\frac{49}{165}$$

$= -\ 0{\cdot}3$ (தோராயமாக)

மாதிரி 301

A, B என்ற இரு பாடங்களில் 8 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன :

A-ல் மதிப் பெண்கள்	25	31	35	40	45	60	16	70
B-ல் மதிப் பெண்கள்	15	28	32	54	61	58	42	64

தர வரிசைகளுக்கிடையேயுள்ள இடையுறவைக் கண்டு பிடித்து உனது முடிவுகளைத் தெரிவி.

(பி.ஏ.—செப்டம்பர்—சென்னை—1972)

தீர்வு :

A-ல் மதிப்பெண் கள்	B-ல் மதிப் பெண்கள்	பாடம் A-ன் மாணவத் தர வரிசை	பாடம் B ல் மாணவத் தரவரிசை	விலக்கம் d_i	விலக்க வர்க்கம் d_i^2
25	15	7	8	—1	1
31	28	6	7	—1	1
35	32	5	6	—1	1
40	54	4	4	0	0
45	61	3	2	1	1
60	58	2	3	—1	1
16	42	8	5	3	9
70	64	1	1	0	0
மொத்தம்					14

தர வரிசைகளுக்கிடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழு காணும் சூத்திரம் :

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$\text{ஆகவே, } r = 1 - \frac{6\times 14}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{6}$$

$$= 0{\cdot}833$$

பாடம் A, பாடம் B ஆகியவற்றில் மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களுக்கு இடையே உயரிய அளவில் இடையுறவு உள்ளது என்பதைத் தர வரிசை இடையுறவுக் கெழு (0·833) மூலம் அறிகிறோம்.

மாதிரி 302

கீழ்க்காணும் விவர அட்டவணையில் 20 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவில் உள்ள மாணவர்கள் A,B ஆகிய இரு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் தரப்பட்டுள்ளன :

பாடம் A	99	47	68	57	76	61	30	44	82	58
	49	65	63	69	72	37	59	77	53	40

பாடம் B	73	61	70	40	72	39	18	62	66	65
	60	91	67	34	51	48	53	82	76	17

பாடம் A-ன் தர வரிசைக்கும், பாடம் B-ன் தர வரிசைக்கும் இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

(ஆனர்ஸ்—சென்னை)

தீர்வு :

பாடம் A	தர வரிசை	பாடம் B	தர வரிசை	தர வரிசை விலக்கம் d_i	விலக்க வர்க்கம் d_i^2
99	1	73	4	3	9
47	16	61	11	5	25
68	7	70	6	1	1
57	13	40	16	3	9
76	4	72	5	1	1
61	10	39	17	7	49
30	20	18	19	1	1
44	17	62	10	7	49
82	2	66	8	6	36
58	12	65	9	3	9
49	15	60	12	3	9
65	8	91	1	7	49
63	9	67	7	2	4
69	6	34	17	8	64
72	5	51	14	9	81
37	19	48	15	4	16
59	11	53	13	2	4
77	3	82	2	1	1
53	14	76	3	11	121
40	15	17	20	5	25
$n=20$					563

மேற்கண்ட பட்டியலில், $\Sigma d^2 = 563$, $n = 20$

$$\text{தரவரிசை இடையுறவுக் கெழு} = p = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$\therefore r = 1 - \frac{6 \times 563}{20 \times 399}$$

$$= \frac{4602}{7680}$$

$$= 0{\cdot}58 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி 303

10 மாணவர்கள் அடிப்படைக் கொள்கை, பொருளாதாரம் புள்ளியில் பாடங்களில் கீழ்க்காணும் சதவீத மதிப்பெண்கள் பெற்றுள்ளனர் :

மாணவர்கள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
பொருளாதாரம் %	78	36	98	25	75	82	90	62	65	39
புள்ளியியல் %	84	51	91	60	68	62	86	58	53	47

தர வரிசை இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

(எம்.ஏ.—ஆக்ரா—1951)

தீர்வு :

தர வரிசை இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

மாணவர்கள்	பொருளாதாரம் மதிப்பெண் %	பொருளாதாரம் தர வரிசை	புள்ளியியல் மதிப்பெண் %	புள்ளியியில் தர வரிசை	தரவரிசை விலக்கம் d	விலக்க வர்க்கம் d^2
1	38	4	84	3	1	1
2	36	9	51	9	0	0
3	98	1	91	1	0	0
4	25	10	60	6	4	16
5	75	5	68	4	1	1
6	82	3	62	5	—2	4
7	90	2	86	2	0	0
8	62	7	58	7	0	0
9	65	6	53	8	—2	4
10	39	8	47	10	—2	4
$n=10$						30

மேற்கண்ட பட்டியலில், $n = 10 \quad \Sigma d^2 = 30$

தரவரிசை இடையுறவுக் கெழு $r = 1 - \frac{6(\Sigma d^2)}{n(n^2-1)}$

$$\therefore \quad r = 1 - \frac{6 \times 30}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{180}{990} = 1 - \frac{2}{11} = 0{\cdot}82$$

மாதிரி 304

ஓர் அழகுப் போட்டியில் 10 நங்கைகளுக்கு மூன்று நீதிபதிகள் அளித்த தர வரிசைகள் முறையே கீழேயுள்ள பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன :

முதல் நீதிபதி	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
2-ம் நீதிபதி	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
3-ம் நீதிபதி	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

தர வரிசை இடையுறவு முறையைப் பயன்படுத்தி எந்த இரு நீதிபதிகள் பொதுவான அழகுக் கண்ணோட்டமுடையவர்கள் என்பதை ஆய்க.

தீர்வு :

நாம்,

(1) முதலாவது — இரண்டாவது

(2) முதலாவது — மூன்றாவது

(3) இரண்டாவது — மூன்றாவது

உள்ள நீதிபதிகளின் தர வரிசை மதிப்பெண்களுக்கு, மூன்று தனித்தனிக் குழுக்களாகத் தர வரிசை இடையுறவுக் கெழுக்களைக் கணக்கிட வேண்டும்

முதல் நீதிபதியின் தரவரிசை	இரண்டாம் நீதிபதியின் தரவரிசை	மூன்றாம் நீதிபதியின் தரவரிசை	I குழு		II குழு		III குழு	
			முதலாமவர்க்கும் இரண்டாமவர்க்கும் உள்ள விலக்கம் d_1	விலக்க வர்க்கம் d_1^2	முதலாமவர்க்கும் மூன்றாமவர்க்கும் உள்ள விலக்கம் d_2	விலக்க வர்க்கம் d_2^2	இரண்டாமவர்க்கும் மூன்றாமவர்க்கும் உள்ள விலக்கம் d_3	விலக்க வர்க்கம் d^2
1	3	6	−2	4	−5	25	−3	9
6	5	4	1	1	2	4	1	1
5	8	9	−3	9	−4	16	−1	1
10	4	8	6	36	2	4	−4	16
3	7	1	−4	16	2	4	6	36
2	10	2	−8	64	0	0	8	64
4	2	3	2	4	1	1	−1	1
9	1	10	8	64	−1	1	−9	81
7	6	5	1	1	2	4	1	1
8	9	7	−1	1	1	1	2	4
				200		60		214

முதலாவது, இரண்டாவது நீதிபதிகளின் தீர்ப்புகளுக்கு இடையே உள்ள தர வரிசை இடையுறவுக் கெழு

$$= 1 - \frac{6\,(\Sigma d^2)}{n\,(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 200}{10(100 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{1200}{990}$$

$$= 1 - 1{\cdot}212 \quad = -\mathbf{0{\cdot}212}$$

முதலாவது, மூன்றாவது நீதிபதிகளின் தீர்ப்புகளுக்கிடையே உள்ள தரவரிசை இடையுறவுக் கெழு

$$= 1 - \frac{6\,(\Sigma d^2)}{n\,(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 50}{10(100 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{360}{990}$$

$$= 1 - {\cdot}364 \quad = \mathbf{0{\cdot}636}$$

இரண்டாவது, மூன்றாவது நீதிபதிகளின் தீர்ப்புகளுக்கிடையே உள்ள தர வரிசை இடையுறவுக் கெழு

$$= 1 - \frac{6\,(\Sigma d^2)}{n\,(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 214}{10(100 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{1284}{990}$$

$$= 1 - 1{\cdot}297 \quad = -\mathbf{0{\cdot}297}$$

I, III-வது குழுக்களில் கண்ட தரவரிசை இடையுறவுக் கெழு எதிரிடையுறவு எண்ணாக இருக்கிறது. முதலாவது, மூன்றாவது நீதிபதிகளின் தீர்ப்புகளுக்கு இடையேயுள்ள தரவரிசை இடையுறவுக் கெழு (0·636) ஒன்று மட்டும்தான் நேரிடை இடையுறவாக இருக்கிறது ஆகையால் இவ்விரு நீதிபதிகளும் பொதுவான உறவுடைய அழகுக் கண்ணோட்டமுடையவர்களாக இருப்பது காண்கிறோம்

மாதிரி 305

கீழ்க்காணும் பட்டியல் 12 விற்பனையாளர்களின் திறமைத் தர வரிசையையும், வேலையிலிருந்த காலவரையின் தர வரிசையையும் தருகிறது. தர வரிசைக் கெழுவைக் கிணக்கிடு.

விற்பனையாளர்கள்	*D*	*K*	*L*	*A*	*C*	*H*	*E*	*I*	*J*	*F*	*B*	*G*
திறமை (*X* வரிசை)	1	2	3	5	5	5	7	8	9	10	11	12
வேலைக் காலம் (*Y* வரிசை)	2	1	5	3	9	7·5	7·5	6	4	11·5	10	11·5

தீர்வு :

தர வரிசை இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடும் அட்டவணை:

விற்பனையாளர்கள்	திறமைத் தர வரிசை *X*	வேலைக்காலத் தர வரிசை *Y*	விலக்கம் $d = X-Y$	விலக்க வர்க்கம் d^2
D	1	2	—1	1
K	2	1	1	1
L	3	5	—2	4
A	5	3	2	4
C	5	9	—4	16
H	5	7·5	—2·5	6·25
E	7	7·5	—0·5	6·25
I	8	6	2	4
J	9	4	5	25
F	10	11·5	—1·5	2·25
B	11	10	1	1
G	12	11·5	0·5	0·25
மொத்தம்				65·0

மேற்கண்ட பட்டியல் மூலம் $\Sigma d^2 = 65{\cdot}0$

பட்டியலில், மூன்று தர வரிசை சொல்ல முடியாத முடிச்சுகள் (Ties) முறையே மூன்றாகவும் இரண்டாக இரண்டும், இருப்பதால் சரி செய்த விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூட்டல் காணவேண்டும்.

$$\therefore \Sigma d^2 \text{ (சரி செய்யப்பட்டது)} = 65{\cdot}0 + \tfrac{1}{12}(3^3-3) + \tfrac{1}{12}(2^3-2) + \tfrac{1}{12}(2^3-2)$$

$$= 68{\cdot}0$$

$$\text{தரவரிசை இடையுறவுக் கெழு } r = 1 - \frac{6\,(\Sigma d^2)}{n\,(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times 68}{12\,(144-1)}$$

$$= 0{\cdot}76 \text{ (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 306

ஒரு கலைப் போட்டிக்கு அனுப்பப்பட்ட 12 படங்களை இரண்டு நீதிபதிகள் கீழ்க்காணுமாறு தர வரிசைப்படுத்தித் தீர்ப்பு அளித்தனர். தர வரிசை இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

படங்கள்	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
முதல் நீதிபதி வழங்கிய தர வரிசை	5	9	6	7	1	3	4	12	2	11	10	8
இரண்டாம் நீதிபதி வழங்கிய தர வரிசை	5	8	9	11	3	1	2	10	4	12	7	6

(ஐ ஏ.எஸ்.—1956)

தீர்வு :

தர வரிசை இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

படங்கள்	முதல் நீதிபதி வழங்கிய தர வரிசை X	இரண்டாவது நீதிபதி வழங்கிய தர வரிசை Y	விலக்கம் d (= X − Y)	விலக்க வர்க்கம் d^2
A	5	5	0	0
B	9	8	1	1
C	6	9	—3	9
D	7	11	—4	16
E	1	3	—2	4
F	3	1	2	4
G	4	2	2	4
H	12	10	2	4
I	2	4	—2	4
J	11	12	—1	1
K	10	7	3	9
L	8	6	2	4
மொத்தம்				60

மேற்கண்ட பட்டியலில்

$$n = 12$$

$$\Sigma d^2 = 60$$

தரவரிசை இடையுறவுக் கெழு

$$r = 1 - \frac{6\,(\Sigma d^2)}{n\,(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 60}{12\,(12^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{360}{1716}$$

$$= 1 - 0{\cdot}2098$$

$$= \mathbf{0{\cdot}7902}$$

மாதிரி 307

ஒரு பொருளின் விற்பனைக்கு வந்த சரக்குக் குறியீட்டெண்ணும் விலையும் கீழேயுள்ள பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. தகுந்த மாற்றங்களை முடிச்சு (Tie) எண்களுக்குக் கொடுத்து தர வரிசைக் கெழுவைக் கண்டுபிடி.

விற்பனைக்கு வந்த சரக்குக் குறியீட்டெண்	124	100	105	112	102	93	99	115
விலைக் குறியீட்டெண்	80	100	102	91	100	111	109	100
விற்பனைக்கு வந்த சரக்குக் குறியீட்டெண்	123	104	99	113	121	103	101	
விலைக் குறியீட்டெண்	89	104	111	102	98	111	123	

தீர்வு :

தரவரிசை இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

விற்பனைக்கு வந்த சரக்குக் குறியீட்டெண்	விலைக் குறியீட்டெண்	வி.வ.ச.குறியீட்டெண் தரவரிசை X	விலைக் குறியீட்டெண் தரவரிசை Y	விலக்கம் $d = X-Y$	விலக்க வர்க்கம் d^2
124	80	1	15	—14	196
100	100	12	10	2	4
105	102	7	7·5	—5	0·25
112	91	6	13	—7	49
102	100	10	10	0	0
93	111	15	3	12	144
99	109	13·5	5	8·5	72·25
115	100	4	10	— 6	36
123	89	2	14	—12	144
104	104	8	6	2	4
99	111	13·5	3	10·5	110·25
113	102	5	7·5	—2·5	6·25
121	98	3	12	9	81
103	111	9	3	6	36
101	123	11	1	10	100
மொத்தம்					983·00

மேற்கண்ட பட்டியல் மூலம் $\Sigma d^2 = 983{\cdot}00$

மேற்கண்ட பட்டியலில் நான்கு தரவரிசைகளின் சொல்ல முடியாத முடிச்சுகள் (Ties) முறையே மூன்றாக இரண்டும், இரண்டாக இரண்டும் இருப்பதால், சரி செய்த விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூட்டல் காணவேண்டும்.

$$\therefore \Sigma d^2 \text{ (சரி செய்யப்பட்டது)} = 983 + \frac{(3^3-3)}{12} + \frac{(3^3-3)}{12} + \frac{(2^3-2)}{12} + \frac{(2^3-2)}{12}$$

$$= 983+2+2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}$$

$$= 988$$

$$\text{தர வரிசை இடையுறவுக் கெழு } r = 1 - \frac{6(\Sigma d^2)}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\times 988}{15(15^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{5928}{3360}$$

$$= 1-1{\cdot}76$$

$$= -0{\cdot}76$$

கன்கரண்ட் விலக்க முறை
(Concurrent Deviation Method)

மாதிரி 308

கீழே தரப்பட்ட விவரப் பட்டியலுக்கு கன்கரண்ட் விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடு :

ஆண்டு	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951
விற்பனைக்கு வந்த சரக்கு (x)	160	164	172	182	166	170	178	192	186
விலை (y)	292	280	260	234	266	254	230	190	200

தீர்வு : கன்கரண்ட் விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

ஆண்டு	விற்பனைக்கு வந்த சரக்கு வரிசை x		விலை வரிசை y		பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	குறியீட்டெண் x	முன் வருடத்தில் இருந்து விலக்கம் d_x	குறியீட்டெண் y	முன் வருடத்தில் இருந்து விலக்கம் d_y	
1943	160		292		
1944	164	+	280	—	
1945	172	+	260	—	—
1946	182	+	234	—	—
1947	166	—	266	+	—
1948	170	+	254	—	—
1949	178	+	230	—	—
1950	192	+	190	—	—
1951	186	—	200	+	—
		$n=8$		$n=8$	0

கன்கரண்ட் விலக்கக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$\therefore \quad r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

$$\therefore \quad r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{0-8}{8}\right)}$$

$$= -\sqrt{-(-1)}$$

ஆகவே, கன்கரண்ட் விலக்க முறையில் விற்பனைச் சரக்கிற்கும் விலைக்கும் இடையே முழு அளவு எதிரிடையுறவு திகழ்வதைக் காணலாம்.

மாதிரி 309

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்குக் கன்கரண்ட் விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

n = கண்டறிந்த ஜோடி எண்கள் = 47

c = கன்கரண்ட் விலக்க எண்கள் = 15

தீர்வு :

கன்கரண்ட விலக்கக் கெழு $r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$

மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் மதிப்புகளைப் பிரதியிட்ட பின் :

$$r = \pm\sqrt{\pm\frac{(2\times 15-49)}{49}}$$

$$= -\sqrt{-\left(\frac{-19}{49}\right)}$$

$$= -\frac{\sqrt{19}}{7} = -\frac{(-4{\cdot}36)}{7}$$

$$= \frac{4{\cdot}36}{7} = 0{\cdot}623 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

மாதிரி 310

கீழ்க் காணும் பட்டியல் 12 மாதங்களுக்கு எஃகு உற்பத்தியையும் (டன்களில்) எஃகுத் தொழிலில் வேலை கிடைக்காதவர்களின் எண்ணிக்கையையும் (ஆயிரத்தில்) கொடுக்கிறது. கன்கரண்ட் விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

மாதங்கள்	எஃகு உற்பத்தி (1000 டன்களில்)	வேலை கிடைக்காதவர்கள் (ஆயிரத்தில்)
சனவரி	16·0	180
பிப்ரவரி	18·4	195
மார்ச்	18·6	183
ஏப்ரல்	17·0	222
மே	14·4	276
ஜூன்	11·8	471
ஜூலை	10·2	390
ஆகஸ்டு	13·2	318
செப்டம்பர்	15·8	174
அக்டோபர்	15·2	240
நவம்பர்	16·4	150
டிசம்பர்	18·6	135

தீர்வு :

கன்கரண்ட் விலக்கச் செழுமைக் கணக்கிடல் :

மாதங்கள்	எஃகு உற்பத்தி (1000 டன்னில்)		எந்தத் தொழிலில் வேலை கிடைக்காதவர்கள் (ஆயிரத்தில்)		பெருக்கல் $d_x \times d_y$
	உற்பத்தி (x)	முன் மாதத்திலிருந்து விலக்கம் d_x	எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்) (y)	முன் மாதத்திலிருந்து விலக்கம் d_y	
சனவரி	16·0		180		
பிப்ரவரி	18·4	+	195	+	+
மார்ச்	18·6	+	183	—	—
ஏப்ரல்	17·0	—	222	+	—
மே	14·4	—	276	+	—
சூன்	11·8	—	471	+	—
சூலை	10·2	—	390	—	+
ஆகஸ்டு	13·2	+	318	—	—
செப்டம்பர்	15·8	+	174	—	—
அக்டோபர்	15·2	—	240	+	—
நவம்பர்	16·4	+	150	—	—
டிசம்பர்	18·6	+	135	—	—
		$n=11$		$n=1$	$c=2$

கன்கரண்ட் விலக்கக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

$$\therefore r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{-7}{11}\right)}$$
$$= -\sqrt{-(-0{\cdot}6364)}$$
$$= -\sqrt{0{\cdot}6364}$$
$$= -0{\cdot}798$$

எஃகு உற்பத்திக்கும் எஃகுத் தொழிலில் வேலையற்றவர்களுக்கும் இடையே உள்ள கன்கரன்ட் விலக்கக் கெழு —0·798 ஆகும். ஆதலின் மேற்கண்ட இரண்டிலும் உயர் அளவு எதிரிடைத் தொடர்பு இருத்தலைக் காணலாம்.

மாதிரி 311

கீழ்க்காணும் பட்டியலில் தந்துள்ள 12 ஆண்டுகளின் அரிசி விலைக்கும் மழையளவிற்கும் இடையேயுள்ள கன்கரண்ட் விலக்கக் கெழுவைக் கணக்கிடு.

ஆண்டுகள்	அரிசி விலை (மூட்டைக்கு)	வருட மழையளவு (அங்குலத்தில்)
1931	25·3	126
1932	23·9	135
1933	22·3	137
1934	33·3	137
1935	33·0	131
1936	32·5	134
1937	32·8	139
1938	32·0	131
1939	32·2	147
1940	32·4	137
1941	33·1	142
1942	33·6	138

தீர்வு :

கன்கரண்ட் விலக்கக் கெழு கணக்கிடல் :

ஆண்டுகள்	அரிசி விலை		வருட மழையளவு		பெருக்கல் $d_x d_y$
	அரிசி விலை (மூட்டைக்கு) x	முன் ஆண்டிலிருந்து விலக்கம் d_x	மழையளவு (அங்குலத்தில்) y	முன் ஆண்டிலிருந்து விலக்கம் δ_y	
1931	25·3		126		
1932	23·9	—	135	+	—
1933	22·3	—	137	+	—
1934	33·3	+	137	0	0
1935	33·0	—	131	—	+
1936	32·5	—	134	+	—
1937	32·8	+	139	+	+
1938	32·0	—	133	—	+
1939	32·2	+	147	+	+
1940	32·4	+	137	—	—
1941	33·1	+	142	+	+
1942	33·6	+	138	—	—
		$n=11$		$n=11$	$c=5$

கன்கரண்ட் விலக்கக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2\times 5-11}{11}\right)}$$

$$= -\sqrt{-\left(-\frac{1}{11}\right)}$$

$$= -\sqrt{\frac{11}{121}} = -\frac{3\cdot 317}{11} = -0\cdot 301$$

மாதிரி 312

கீழ்க் காணும் விவரங்களுக்கு (1) கார்ல் பியர்சன் (2) ஸ்பியர்மேன் தரவரிசை (3) கன்காரண்ட் விலக்கம் ஆகிய முறைகளில் இடையுறவுக் கெழுவினைக் கண்டுபிடி.

விற்பனைக்கு வந்த சரக்கு	285	290	280	281	275	284	280	286
விலை	15	19	21	20	19	15	18	16

தீர்வு :

(1) கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழு கணக்கிடல் :

விற்பனைக்கு வந்த சரக்கு (x)	(290) லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	விலை (y)	(20) லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$
285	–5	25	15	–5	25	25
290	0	0	19	–1	1	0
280	–10	100	21	1	1	–10
281	–9	81	20	0	0	0
275	–15	225	19	–1	1	15
284	–6	36	15	–5	25	30
280	–10	100	18	–2	4	20
286	–4	16	16	–4	16	16
$n=8$	–59	583	$n=8$	–17	73	96

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம்

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)\,(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right] \times \left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma \sigma_y)^2}{n}\right]}}$$

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து,

$$n = 8\,; \qquad \Sigma d_x = -59\,; \qquad \Sigma d_x^2 = 583\,;$$

$$\Sigma d_y = -17\,; \qquad \Sigma d_y^2 = 73\,; \qquad \Sigma d_x d_y = 96.$$

$$\therefore \quad r = \frac{\left(96 - \frac{(-56 \times -17)}{8}\right)}{\sqrt{\left[583 - \frac{(-59)^2}{8}\right] \times \left[73 - \frac{(-17)^2}{8}\right]}}$$

$$= \frac{96 - 125{\cdot}375}{\sqrt{(583 - 435{\cdot}125)\ (73 - 36{\cdot}125)}}$$

$$= \frac{-29{\cdot}375}{\sqrt{147{\cdot}875 \times 36{\cdot}875}}$$

$$= -0{\cdot}4$$

(2) ஸ்பியர்மேன் தரவரிசை முறையில் இடையுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடல் :

(x)	தர வரிசை	(y)	தர வரிசை	தர வரிசை விலக்கங்கள் (d)	விலக்க வர்க்கம் d^2
285	3	15	7·5	—4·5	20 25
290	1	19	3·5	—2·5	6·25
280	6·5	21	1,	5·5	30·25
281	5	20	2	3	9·00
275	8	19	3·5	4·5	20·25
284	4	15	7·5	—3·5	12·25
280	6·5	18	5	1·5	2·25
286	2	16	6	—4	16·00
$n=8$		$n=8$			$\Sigma d^2 = 116{\cdot}5$

ஸ்பியர்மேனின் தரவரிசை இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

ஆகவே, $r = 1 - \frac{(6 \times 116{\cdot}5)}{8\,(64-1)}$

$$= 1 - \frac{699}{504}$$

$$= -\frac{195}{504}$$

$$= -0{\cdot}39$$

(3) கன்கரண்ட் விலக்க முறையில் இடையுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடல் :

வரிசை எண்	x	முன் எண்ணிலிருந்து விலக்கம் d_x	y	முன் எண்ணிலிருந்து விலக்கம் d_y	கன்கரண்ட் விலக்கம்
1	285		15		
2	290	+	19	+	+
3	280	—	21	+	—
4	281	+	20	—	—
5	275	—	19	—	+
6	284	+	15	—	—
7	280	—	18	+	—
8	286	+	16	—	—
		$n=7$		$n=7$	$c=2$

கன்கரண்ட் விலக்க இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$r = \pm \sqrt{\pm \left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

$$= \pm \sqrt{\pm \frac{2 \times 2 - 7}{7}}$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{7}} = -\sqrt{43}$$

$$= -0{\cdot}65$$ (தோராயமாக)

மாதிரி 313

கொடுக்கப்பட்டவைகள்:

x, y வரிசைகளின் கண்டறியப்பட்ட ஜோடி எண்கள் $= 15$

x வரிசையின் கூட்டுச் சராசரி $= 25$

x வரிசையின் திட்ட விலக்கம் (Standard deviation) $= 3{\cdot}01$

y வரிசையின் கூட்டுச் சராசரி $= 18$

y வரிசையின் திட்ட விலக்கம் $= 3{\cdot}03$

x, y வரிசைகளின் விலக்கங்களின் பெருக்கலின் கூடுதல் $= 122$

(i) x, y-களின் இடையுறவுக் கெழு

(ii) இடையுறவுக் கெழுவின் ஊகப் பிழை ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடி.

(பி.காம்.—1948)

தீர்வு :

$$\text{(i)} \quad r = \frac{\Sigma x' y'}{n\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$= \frac{122}{15 \times 3{\cdot}01 \times 3{\cdot}03} = \frac{122}{136{\cdot}8045}$$

$$= 0{\cdot}89$$

ஆகவே, இடையுறவுக் கெழு $= \mathbf{0{\cdot}89}$.

$$\text{(ii)} \quad \text{ஊகப் பிழை} = 0{\cdot}6745\ \frac{(1-r^2)}{\sqrt{n}}$$

$$= 0{\cdot}6745\ \frac{1-(0{\cdot}89)^2}{\sqrt{15}}$$

$$= 0{\cdot}036$$

ஆகவே, இடையுறவு ஊகப் பிழை $= \mathbf{0{\cdot}036}$

மாதிரி 314

16 கண்டறிந்த எண்களைக் கொண்ட இடையுறவுக் கணக்கில் $0{\cdot}6745 = \frac{2}{3}$ என ஊகித்துக்கொண்டு, இடையுறவுக் கெழுவின்

ஊகப் பிழையின் மதிப்பு 0·125 எனக் கணக்கிடப்பட்டது. r-ன் மதிப்பு சிறப்பு வாய்ந்ததாக (significant) இராது என நிரூபி.

(பி.காம்.—1964)

தீர்வு :

$$P.E = \frac{\frac{2}{3}(1-r^2)}{\sqrt{n}}$$

$$0\,125 = \frac{\frac{2}{3}(1-r^2)}{\sqrt{16}}$$

அல்லது $0{\cdot}125 = \dfrac{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}r^2}{4}$

அல்லது $0{\cdot}5 = \frac{2}{3}-\frac{2}{3}r^2$

அல்லது $5-\frac{2}{3} = \frac{2}{3}r^2$

அல்லது $\dfrac{-5}{30} = -\frac{2}{3}r^2$

அல்லது $r^2 = \dfrac{15}{60} = 0{\cdot}25$

$\therefore \quad r = 0{\cdot}5$

ஆகவே, $r(=0{\cdot}5)$ என்பது ஆறுமடங்கு ஊகப் பிழை மதிப்பிற்குக் குறைவாக இருப்பதால் r சிறப்பற்றது (insignificant).

மாதிரி 315

எந்த r மிகவும் சிறப்புடையது (significant) ?

(i) $r = 0{\cdot}8$; ஊகப் பிழை = 0·09

(ii) $r = 0{\cdot}7$; ஊகப் பிழை = 0·05

(பி.காம்.—1963)

தீர்வு :

(i) $\dfrac{0{\cdot}8}{0{\cdot}09} = 9$ (r—ன் மதிப்பு ஊகப் பிழையைப் போல 9 மடங்கு)

(ii) $\dfrac{0{\cdot}7}{0{\cdot}05} = 14$ (r—ன் மதிப்பு ஊகப் பிழையைப் போல 14 மடங்கு)

எனவே, இரண்டாவது கணக்கிலுள்ள r மிகவும் சிறப்புடையது (more significant) ஆகும்.

மாதிரி 316

கொடுக்கப்பட்டவை :

உடன் மாற்றம் (covariance) = 27;

இடையுறவுக் கெழு r = 0·6;

y-ன் மாறுபாடு = 25;

x-ன் திட்ட விலக்கத்தைக் கண்டுபிடி

(பி.காம்.—1957)

தீர்வு

உடன்மாற்றம் (covariance) = $r \times \sigma_x \times \sigma_y$

அல்லது $27 = 0 \cdot 6 \times \sigma_x \times \sqrt{25}$

$= 0 \cdot 6 \times \sigma_x \times 5$

அல்லது $27 = 3\ \sigma_x$

அல்லது x-ன் திட்டவிலக்கம்

$$= \frac{27}{3} = 9$$

மாதிரி 317

x, y இரண்டும் தொடர்புடைய மாறிகள். அவற்றைத் தொடர்புபடுத்தும் சில இடையுறவுக் கெழுக்கள் (r) கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

(a) $r = 1$; (b) $r = -1$; (c) $r = 0$; (d) $r = \frac{1}{2}$

(e) $r = -\frac{1}{2}$.

ஒவ்வொரு r மதிப்புக்கும் உரிய விலக்கப் பொருள் என்ன ?

(பி.ஏ.—மதுரை—1972)

(a) $r = 1$ ஆக இருந்தால் x, y ஆகிய இரு தொடர்புடைய மாறிகளுக்கிடையே முழு அளவு நேரிடை இடையுறவு இருக்கிறது எனக் கொள்ளலாம்.

(b) $r = -1$ ஆக இருந்தால், x, y ஆகிய இரு தொடர்புடைய மாறிகளுக்கிடையே முழு அளவு எதிரிடை இடையுறவு இருக்கிறது என அறியலாம்.

ஒரு மாறி மதிப்புகளின் அதிகரிப்பு, மற்றதன் வீழ்ச்சியாலும், வீழ்ச்சி மற்றதன் அதிகரிப்பாலும் பின் தொடரப்பட்டால் அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே எதிரிடை இடையுறவு இருப்பதாகக் கூறலாம். இங்கு இது முழு அளவில் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

(c) $r=0$ ஆக இருந்தால் x,y ஆகிய இரு தொடர்புடைய மாறிகளுக்கிடையே இடையுறவு சிறிதும் இல்லை எனப் பொருள். ஆகவே x,y இரண்டும் சார்பிலா மாறிகள்.

(d) $r=\frac{1}{2}$ ஆக இருந்தால் x,y ஆகிய இரு தொடர்புடைய மாறிகளுக்கிடையே பாதியளவு நேரிடை இடையுறவு இருக்கிறது எனப் பொருள் கொள்ளலாம்.

(e) $r=-\frac{1}{2}$ ஆக இருந்தால் x,y ஆகிய இரு தொடர்புடைய மாறிகளுக்கிடையே பாதியளவு எதிரிடை இடையுறவு இருக்கிறது எனப் பொருள் கொள்ளலாம்.

மாதிரி 318

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுவினைப் பொருள் படுத்தும் விதி முறைகளைக் கூறு.

கண்டறிந்த எண்கள் (i) 50 ; (ii) 500 ஆக இருந்தால் கீழ்க்காணும் r-ன் மதிப்புகளுக்கு என்ன சிறப்புத் தன்மை கிடைக்கிறது ?

$$r = 0{\cdot}2\ ;\quad r = 0{\cdot}4\ ;\quad r = 0{\cdot}9.$$

(பி·காம். — 1949)

தீர்வு :

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுவின் ஊகப் பிழை காணும் சூத்திரம் $= 0{\cdot}6745\left[\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}\right]$

மேற்கண்ட ஊகப் பிழையை அடிப்படையாகக் கொண்ட இடையுறவுக் கெழுவிற்குக் கீழ்க்காணும் சிறப்புத்தன்மை கொடுக்கலாம் :

(1) r ஆனது ஊகப் பிழையை விடக் குறைவாக இருந்தால் அங்கு இடையுறவு தென்படவில்லை.

(2) r ஆனது .6 மடங்கு ஊகப் பிழையை விடக் கூடுதலாக இருந்தால் இடையுறவு சிறப்பாக இருக்கிறது.

(3) ஊகப் பிழையானது உறவில் குறைவாக இருந்தால் இடையுறவைக் கணக்கிட வேண்டியதில்லை (அதாவது r-ன் மதிப்பு 0·3-க்குக் குறைவாய் இருக்கும்பொழுது)

(4) ஊகப் பிழையானது உறவில் குறைவாக இருந்தால் இடையுறவு கவனிக்கும் அளவிற்கு இருக்கிறது. (அதாவது r-ன் மதிப்பு 0·5-க்கு அதிகமாக இருக்கும்பொழுது)

(5) ஊகப் பிழையானது ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது குறைவாக இருப்பின், இடையுறவானது மிக உயரிய அளவில் சிறப்பாகத் தெரிகிறது. (அதாவது r-ன் மதிப்பு 0·75-க்குக் கூடுதலாக இருக்கும்பொழுது)

(i) $n = 50$

(a) $r = 0{\cdot}2$ ஆக இருக்கும்போது ஊகப் பிழை

$$= 0{\cdot}6745 \; \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

$$= 0{\cdot}6745 \times \frac{1-(0{\cdot}2)^2}{\sqrt{50}}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}09} \quad \text{(தோராயமாக)}$$

இங்கு r-ன் மதிப்பு 3 மடங்கு ஊகப் பிழையை விடக் குறைவாக இருக்கிறது. ஆகவே இடையுறவு சிறப்பாக இல்லை.

(b) $r = 0{\cdot}4$ ஆக இருக்கும்போது ஊகப் பிழை

$$= 0{\cdot}6745 \; \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

$$= 0{\cdot}6745 \; \frac{1-(\cdot 4)^2}{\sqrt{50}}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}08} \quad \text{(தோராயமாக)}$$

இங்கு r-ன் மதிப்பு 5 மடங்கு ஊகப் பிழைக்குச் சமமாக இருக்கிறது. ஆகவே இடையுறவு நிச்சயிக்கத் தக்க நம்பிக்கையுடன் சிறப்பாக இருக்கிறது எனக் கொள்ளலாம்.

(c) $r = 0{\cdot}9$ ஆக இருக்கும்போது, ஊகப் பிழையானது

$$= 0{\cdot}6745 \; \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

$$= 0{\cdot}6745 \ \frac{1-(0{\cdot}9)^2}{\sqrt{50}}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}018}$$

இங்கு r-ன் மதிப்பு 50 மடங்கு ஊகப் பிழைக்குச் சமமாக இருக்கிறது. ஆகவே r-ன் மதிப்பு அதிக அளவு சிறப்பாகத் தெரிகிறது (highly significant).

(ii) $n = 500$

(a) $r = 0{\cdot}2$ ஆக இருக்கும்போது ஊகப் பிழை

$$= 0{\cdot}6745 \ \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

$$= 0{\cdot}6745 \ \frac{1-(0{\cdot}2)^2}{\sqrt{500}}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}029}$$

இங்கு r-ன் மதிப்பு 6 மடங்கு ஊகப் பிழையைவிட அதிகமாக இருப்பினும் 0·3 மதிப்புக்குக் குறைவாக இருப்பதைக் காணலாம். ஆகவே, இடையுறவைக் கவனிக்கத் தேவையில்லை.

(b) $r = 0{\cdot}4$ ஆக இருக்கும்போது ஊகப் பிழை

$$= 0{\cdot}6745 \ \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

$$= 0{\cdot}6745 \ \frac{[\,1-(0{\cdot}4)^2\,]}{\sqrt{n}}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}025}$$

இங்கு r-ன் மதிப்பு 0·4 ஆக இருப்பதாலும் 16 மடங்கு ஊகப் பிழைக்குச் சமமாக இருப்பதாலும் இடையுறவு சிறப்பாக இருப்பதாகக் கூறலாம்.

(c) $r = 0 \cdot 9$ ஆக இருக்கும்போது ஊகப் பிழை

$$= 0{\cdot}6745 \ \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

$$= 0{\cdot}6745 \ \frac{1-(0{\cdot}9)^2}{\sqrt{500}}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}006}$$

இங்கு, $r = 0{\cdot}9$ ஆகவும் 150 மடங்கு ஊகப் பிழைக்குச் சமமாகவும் இருப்பதால் இடையுறவு அதிக அளவு சிறப்பாக (highly significant) இருக்கிறது.

மாதிரி 319

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

(a) y-ன் திட்ட விலக்கம் $= 2{\cdot}5$ யூனிட்டுகள்

x-ன் திட்ட விலக்கம் $= 3{\cdot}6$ யூனிட்டுகள்

x, y களின் உடன் தொடர்பு மாறி (covariance) $= -1{\cdot}8$ யூனிட்டுகள்

(b) x-ன் திட்ட விலக்கம் $= 3{\cdot}6$ யூனிட்டுகள்

y-ன் திட்ட விலக்கம் $= 1{\cdot}4$ யூனிட்டுகள்

y சார்ந்த x-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு $= 0{\cdot}28$, $\frac{x \text{ யூனிட்டுகள்}}{y \text{ யூனிட்டுகள்}}$

தீர்வு :

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$r = \frac{\mu''}{\sigma_x \sigma_y}$$

(a) இங்கு, $\sigma_y = 2{\cdot}5$; $\sigma_x = 3{\cdot}6$ $\mu'' = -1{\cdot}8$

$$r = \frac{-1{\cdot}8}{3{\cdot}6 \times 2{\cdot}5}$$

$$= \mathbf{-0{\cdot}2}$$

(b) இங்கு, $\sigma_x = 3{\cdot}0$; $\sigma_y = 1{\cdot}4$; $b_{yx} = 0{\cdot}28$

y சார்ந்த x-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு $b_{yx} = r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

இங்கு இடையுறவுக் கெழு rஐக் கண்டு பிடிக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad r = b_{yx} \times \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$ie., \; r = 0{\cdot}28 \times \frac{3{\cdot}0}{1{\cdot}4}$$

$$= 0{\cdot}6$$

ஆகவே, $r = 0{\cdot}6$

மாதிரி 320

ஒரு கணக்கிடும் இயந்திரம் 25 ஜோடி கண்டறிந்த x, y மாறிகளின் இடையே உள்ள இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடும் போது கீழே கொடுத்துள்ள மதிப்புகளைக் கொடுத்தது :

$$n = 25; \quad \Sigma x = 125; \quad \Sigma x^2 = 650;$$

$$\Sigma y = 100; \quad \Sigma y^2 = 960; \quad \Sigma xy = 508$$

உண்மையான ஜோடிகளின் மதிப்புகள்

x	y
8	12
6	8

ஆக இருக்கும் போது தவறுதலாக

x	y
6	14
8	6

என்ற மதிப்பாகக் கொண்டு கணக்கிடும் இயந்திரம் கணக்கிட்டு மேற்கண்ட மதிப்புகளைக் கொடுத்துள்ளதைப் பின்பு சரி பார்க்கும் போது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.

சரியான இடையுறவுக் கெழுவின் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்துக் காட்டு.

(பி.ஏ.—திருவனந்தபுரம்)

தீர்வு :

மேற்கண்ட தவற்றினால் Σx, Σy, Σx^2 ஆகியவைகளின் மதிப்பு மாறவில்லை.

ஆனால், Σy^2, Σxy ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் மாறியிருக்கின்றன.

பழைய $\Sigma y^2 = 14^2 + 6^2 = 232$

ஆனால் உண்மையான $\Sigma y^2 = 12^2 + 8^2 = 208$

ஆதலால், சரி செய்யப்பட்ட $\Sigma y^2 = 960 - 232 + 208 = 936$

பழைய $\Sigma xy = (6 \times 14) + (8 \times 6)$

$= 132$

ஆனால் உண்மையான $\Sigma xy = (8\times 12)+(6\times 8)$
$= 144$

ஆகையால் சரி செய்யப் பட்ட Σxy $\Big\}$ $= 508-132+144 = 520.$

$$\therefore r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

$$= \frac{520}{\sqrt{650\times 936}} = \tfrac{2}{3}$$

சரி செய்யப்பட்ட இடையுறவுக் கெழு $r = \frac{2}{3}$

மாதிரி 321

$X_i+Y_i = (n+1)$ என்றால், $r = -1$ என்று காட்டு.

தீர்வு :

இங்கு $X_i-Y_i = d_i$;

$$X_i+Y_i = (n+1)$$

$$\therefore d_i = 2X_i - (n+1)$$

$$\therefore \Sigma d^2 = 4\Sigma X_i^2 - 4(n+1)\Sigma X+(n)\times(n+1)^2$$

$$= 4\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\ (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + n\ (n+1)^2$$

$$= \tfrac{1}{3}\, n\,(n^2-1)$$

$$\therefore r = 1 - \frac{6\times\frac{1}{3}n\ (n^2-1)}{n(n^2-1)} = -1$$

ஆதலால் $r = -1$ எனக் காண்கிறோம்

மாதிரி 322

கொடுக்கப்பட்டவை :-

$r = 0{\cdot}56$; $\Sigma x'y' = 60$; $\sigma_y = 4$; $\Sigma x^2 = 90$

$[x' = (x-\bar{x})$; $y' = (y-\bar{y})]$

n-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

கார்ல் பியர்சன் உடன் தொடர்புக் கெழு $r = \dfrac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)\ (\Sigma y'^2)}}$

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட்ட பின்பு,

$$56 = \frac{60}{\sqrt{90 \times (\Sigma y'^2)}}$$

அல்லது $0\ 3136 = \dfrac{3600}{90 \times (\Sigma y'^2)}$

அல்லது $28{\cdot}224 \times (\Sigma y'^2) = 3600$

$$ie.,\ \Sigma y'^2 = \frac{3600}{28{\cdot}224}$$

$\therefore\ \Sigma y'^2 =$ **128** (தோராயமாக)

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma y'^2}{n}$$

$$= 16\ (\because \sigma_y = 4)$$

$$ie.,\ \frac{128}{n} = 16$$

அல்லது, $n = \dfrac{128}{16}$

$= \mathbf{8}$

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கின் கண்டறிந்த விவரங்களின் எண்ணிக்கை $n = \mathbf{8}$

5. ஒட்டுறவு
(Regression)

x, y என்ற இரு மாறிகளுக்கு இடையே முழு இடையுறவு இருந்தால், ஒரே ஒரு சார்புச் சமன்பாடு இருக்கும். இங்ஙனம் முழு இடையுறவு இல்லையென்றால், இரண்டு சார்புச் சமன்பாடுகளைக் காண்கிறோம். அவைகளை முறையே 'x சார்ந்த y சமன்பாடு' என்றும், 'y சார்ந்த x சமன்பாடு' என்றும் அழைக்கிறோம்.

'x சார்ந்த y சமன்பாடு'

$$(y-\bar{y}) = r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_y}\,(x-\bar{x}) \qquad \dots (1)$$

(அல்லது)

$$(y-\bar{y}) = b_{yx}\,(x-\bar{x})$$

(அல்லது)

$$(y-\bar{y}) = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2}\,(x-\bar{x})$$

ஆகவே, 'x சார்ந்த y ஒட்டுறவுக் கெழு' :

$$b_{yx} = r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2} \qquad \dots (2)$$

'y சார்ந்த x சமன்பாடு'

$$(x-\bar{x}) = r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\,(y-\bar{y}) \qquad \dots (3)$$

(அல்லது)

$$(x-\bar{x}) = b_{xy}\,(y-\bar{y})$$

(அல்லது)

$$(x-\bar{x}) = \frac{\mu_{11}}{\sigma_y^2}\,(y-\bar{y})$$

ஆகவே, 'y சார்ந்த x ஒட்டுறவுக் கெழு' :

$$b_{xy} = r\ \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_y{}^2} \qquad \dots (4)$$

மேற்காணும் (1), (2), (3), (4)-களில் $\bar{x}$, $\bar{y}$ என்பன முறையே x, y களில் கூட்டுச் சராசரிகளாகும்; σ_x, σ_y என்பன முறையே x, y-களின் திட்ட விலக்கங்களாகும்; r என்பது இரண்டு வரிசைகளின் இடையுறவுக் கெழுவாகும்; b_{yx} என்பது 'x சார்ந்த x-ன் ஒட்டுறவுக் கெழுவாகும் ; b_{xy} என்பது 'y சார்ந்த x-ன் ஒட்டுறவுக் கெழுவாகும்; μ_{11} என்பது x, y வரிசை களின் உடன்மாற்றமாகும்.

ஒட்டுறவுக் கெழுக்களைக் கணக்கிடல் :

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\left(\Sigma d_x{}^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right)}$$

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_y{}^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}$$

மாறு விகிதம் (Ratio of Variation)

$$\text{மாறு விகிதச் சூத்திரம்} = \frac{\Sigma \frac{d_y}{d_x}}{n}$$

சூத்திரத்தில் d_x என்பது x மாறியின் கூட்டுச் சராசரியை அடிப்படையாகக் கொண்டு கண்ட சதவீத மதிப்புகளின், 100-லிருந்து அடைந்த விலக்கங்கள் ; d_y என்பது y மாறியின் கூட்டுச் சராசரியை அடிப்படையாகக் கொண்டு கண்ட சதவீதங்களின், 100-லிருந்து அடைந்த விலக்கங்கள்.

அதாவது, $d_x = \left(\frac{x}{\bar{x}} \times 100\right) - 100$

$$d_y = \left(\frac{y}{\bar{y}} \times 100\right) - 100$$

மாதிரி 323

இடையுறவுக் கெழுவானது, இரண்டு ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் பெருக்கல் சராசரியாகும் எனக் காட்டு.

$$x \text{ சார்ந்த } y \text{ ஒட்டுறவுக் கெழு } b_{yx} = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$y \text{ சார்ந்த } x \text{ ஒட்டுறவுக் கெழு } b_{xy} = r \times \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

இரண்டு ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் பெருக்கல்

$$= r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \times r \times \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r^2$$

$$\therefore \quad r = \pm \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$

+ அல்லது — குறிகளை b_{yx} (அல்லது b_{xy}) என்ற ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் + ஆகவோ, — ஆகவோ இருப்பதற்குத் தகுந்தாற் போல் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

ஆகையால் இடையுறவுக் கெழுவானது, இரண்டு ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் பெருக்கல் சராசரியாக இருக்கிறது எனப் பார்த்தோம்.

மாதிரி 324

கீழ்க் காணும் அட்டவணையில் தரப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு தண்ணீரைச் சார்ந்த அரிசி மகசூலைக் கொண்ட ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. 40 அங்குலங்கள் ஆழத் தண்ணீருக்குள் நிகழக்கூடிய அரிசி மகசூலைக் கணக்கிடு.

(பி.ஏ.—சென்னை—1953)

தண்ணீர் (அங்குலத்தில்)	12	18	24	30	36	42	48
மகசூல் (டன்னில்)	5·27	5·68	6·25	7·21	8·02	8·71	8·42

தீர்வு :

இங்கு, *தண்ணீர் சார்பற்ற மாறியாகும்.* *ஆகையால், அதை* x *மாறியாகக் கொள்கிறோம் ; மகசூலை* y *மாறியாகக் கொள்கிறோம்.*

x	y	உண்மையான சராசரி 30 லிருந்து விலக்கம் d_x	உண்மையான சராசரி 7.08 லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்கங்களின் பெருக்கல் $d_x \times d_y$	x விலக்கத்தின் வர்க்கம் d_x^2
12	5·27	—18	—1·81	32·58	324
18	5·68	—12	—1·40	16·80	144
24	6·25	— 6	—0·83	4·98	36
30	7·21	0	+0·13	0	0
36	8·02	+ 6	+0·94	5·64	36
42	8·71	+12	+1·63	19·56	144
48	8·42	+18	+1·34	24·12	321
210	49·56	0	0	103·68	1008

x *சார்ந்த* y *ஒட்டுறவுக் கெழு :*

$$b_{yx} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}}$$

$$= \frac{103{\cdot}68 - 0}{1008 - 0} = 0{\cdot}10 \text{ (தோராயமாக)}$$

மேற்கண்ட பட்டியலில்,

$$n = 7\,; \quad \bar{x} = \frac{210}{7} = 30$$

$$\bar{y} = \frac{49{\cdot}56}{7} = 7{\cdot}08$$

$\therefore$ x *சார்ந்த* y*–ன் ஒட்டுறவுக் கோடு*

$$(y - \bar{y}) = b_{yx}\,(x - \bar{x})$$

அல்லது $(y-7\cdot08) = 0\cdot10\ (x-30)$

அல்லது $y = 0\cdot10x+4\cdot08.$

இந்தச் சமன்பாட்டில் $x = 40$ எனப் போட்டால்,

$y = 0\cdot10\ (40)+4\cdot08 = 8\cdot08$ ஆகும்.

ஆகையால் மழையளவு 40″ இருக்கும் பொழுது, நிகழக் கூடிய அரிசி மகசூலின் அளவு 8·08 டன்னுக நிச்சயிக்கின்றோம்.

மாதிரி 325

கீழ்க் காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு, இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளையும் கண்டுபிடி.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

$x = 6\cdot2$ என இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(ஐ. ஏ. எஸ்.—1955)

தீர்வு :

இடையுறவுக் கெழுவையும், இரண்டு ஒட்டுறவுக் கெழுக்களையும் கணக்கிடல் :

x	$d_x=x-5$	d_x^2	y	$d_y=x-12$	d_y^2	$d_x\times d_y$
1	−4	16	9	−3	9	12
2	−3	9	8	−4	16	12
3	−2	4	10	−2	4	4
4	−1	1	12	0	0	0
5	0	0	11	−1	1	0
6	1	1	13	1	1	1
7	2	4	14	2	4	4
8	3	9	16	4	16	12
9	4	16	15	3	9	12
$n=9$	0	60	$n=9$	0	60	57

மேற்கண்ட அட்டவணையின் மூலம்,

$$n = 9;\quad \Sigma d_x = 0;\quad \Sigma d_x^2 = 60;\quad \Sigma d_y = 0;$$
$$\Sigma d_y^2 = 60;\quad \Sigma d_x d_y = 57.$$

x வரிசையின் சராசரி : $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma d_x}{n} \times c = 5+0 = 5.$

y வரிசையின் சராசரி : $\bar{y} = B + \dfrac{\Sigma d_y}{n} \times c = 12+0 = 12.$

இடையுறவுக் கெழு r :

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \dfrac{(\Sigma d_x^2)}{n}\right] \times \left[\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

$$= \frac{57 - \dfrac{(0) \times (0)}{9}}{\sqrt{(60-0) \times (60-0)}} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}$$

$$= 0{\cdot}95$$

x சார்ந்த y ஒட்டுறவுக் கெழு b_{yx} :

$$b_{yx} = \frac{\Sigma d_x\, d_y - \dfrac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_x^2 - \dfrac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]}$$

$$= \frac{57-0}{60-0} = \frac{57}{60}$$

$$= 0{\cdot}95$$

'y சார்ந்த x' ஒட்டுறவுக் கெழு b_{xy} :

$$b_{xy} = \frac{\Sigma\, d_x d_y - \dfrac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}$$

$$= \frac{57-0}{60-0}$$

$$= 0{\cdot}95$$

'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுக் கோடு :

$$(y-\bar{y}) = b_{yx}(x-\bar{x})$$
$$(y-12) = \cdot 95\,(x-5)$$
$$y = \cdot 95x+7\cdot 25$$

'y சார்ந்த x' ஒட்டுறவுக் கோடு :

$$(x-\bar{x}) = b_{xy}(y-\bar{y})$$
$$(x-\bar{x}) = \cdot 95\,(y-\bar{y})$$
$$x = \cdot 95y-6\cdot 4$$

$x=6\cdot 5$ என இருக்கும்பொழுது, y-ன் மதிப்பைக் காண, 'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுக் கோட்டைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

$x=6\cdot 2$ எனக் கொண்டால்,

$$y = \cdot 95x+7\cdot 25$$
$$y = \cdot 95x+7\cdot 25$$
$$y = \cdot 95\times 6\cdot 2+7\cdot 25$$
$$= 13\cdot 14$$

ஆகவே $x=6\cdot 5$ என்பதற்கு ஈடான மதிப்பிடப்பட்ட y-ன் மதிப்பு 13·14 ஆகும்.

மாதிரி 326

கீழே x-பருத்தி, y-கம்பளி மயிர் — இவைகளின் விலைக் குறியீட்டெண்கள் 12 மாதங்களுக்குக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இந்தப் பட்டியலிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவையும், இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் கண்டுபிடிக்க.

மேலும் ஒரு சிதறல் விளக்கப் படம் வரைந்து, இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளையும் அதில் காட்டுக.

x	78	77	85	88	87	82	81	77	76	83	97	93
y	84	82	85	89	90	82	88	92	83	89	98	99

(பி.ஏ.—சென்னை—1971)

தீர்வு :

ஒட்டுறவுக் கெழுக்களையும், இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளையும் கண்டுபிடித்தல்:

x	$d_x = x-85$	d_x^2	y	$d_y = y-85$	d_y^2	$d_x \times d_y$
78	−7	49	84	−1	1	7
77	−8	64	82	−3	9	24
85	0	0	85	0	0	0
88	3	9	89	4	16	12
87	2	4	90	5	25	10
82	−3	9	82	−3	9	9
81	−4	16	88	3	9	−12
77	−8	64	92	7	49	−56
76	−9	81	83	−2	4	18
83	−2	4	89	4	16	−8
97	12	144	98	13	169	156
93	8	64	99	14	196	112
	−16	508		41	503	272

ஒட்டுறவுக் கெழுச் சூத்திரம்

$$r = \frac{\frac{\Sigma d_x d_y}{n} - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\frac{\Sigma d_x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_x}{n}\right)^2\right]\left[\Sigma d_y^2 - \left(\frac{\Sigma d_y}{n}\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]\left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

$$= \frac{272 - \frac{(-16)(41)}{12}}{\sqrt{\left[508 - \frac{(-16)^2}{12}\right]\left[503 - \frac{(41)^2}{12}\right]}}$$

$$= \frac{272+54\cdot67}{\sqrt{(508-21\cdot33)\ (503-140\cdot1)}}$$

$$= \frac{326\cdot67}{\sqrt{486\cdot67\times362\cdot9}}$$

$$= \frac{326\cdot67}{416\cdot6}$$

$= 0\cdot78$ (தோராயமாக)

ஆகவே, ஒட்டுறவுக் கெழு $= \mathbf{0\cdot78}$

மாதிரி 327

கீழ்க் காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட ஒன்பது ஜோடி மதிப்புகளுக்கு இரண்டு ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகளையும் எழுதவும்.

x	152	114	138	154	144	153	141	117	156
y	193	300	414	594	676	549	320	483	481

(ஐ.ஏ.எஸ்.—1915)

தீர்வு :

இரு ஒட்டுறவுக் கெழுக்களையும், இரு ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகளையும் கண்டுபிடித்தல் :

x	$d_x = x-141$	d_x^2	y	$d_y = y-445$	d_y^2	$d_x \times d_y$
152	11	121	193	−252	63504	−2772
114	−27	729	300	−145	21025	3915
138	− 3	9	414	− 41	1681	123
154	13	169	594	149	22201	1937
144	3	9	676	231	53361	693
153	12	144	549	104	10816	1248
141	0	0	320	−125	15625	0
117	−24	576	483	38	1444	−912
156	15	225	481	36	1296	540
$n=9$	0	1982		−5	190953	4772

மேற்கண்ட பட்டியலின் மூலம் கீழ்க் காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$n=9;\ \Sigma d_x = 0\ ;\ \Sigma d_x^2 = 1982\ ;$$

$$\Sigma d_y = -5\ ;\ \Sigma d_y^2 = 190953\ ;\ \Sigma d_x d_y = 4772.$$

'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுக் கெழு b_{yx} :

$$b_{yx} = \frac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_x^2 - \dfrac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]}$$

$$= \frac{4772 - \dfrac{(0) \times (-5)}{9}}{\left[1982 - \dfrac{(0)^2}{9}\right]}$$

$$= \frac{4772-0}{1982-0} = \frac{4772}{1982}$$

$$= \mathbf{2{\cdot}408}$$ (தோராயமாக)

'y சார்ந்த x' ஒட்டுறவுக் கெழு b_{xy} :

$$b_{xy} = \frac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}$$

$$= \frac{4772 - \dfrac{(0) \times (-5)}{9}}{\left[190953 - \dfrac{(-5)^2}{9}\right]} = \frac{4772}{190953 - \dfrac{25}{9}}$$

$$= \frac{4772}{190950{\cdot}23} = {\cdot}025$$

'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு :

$$(y-\bar{y}) = b_{yx}(x-\bar{x})$$

$$ie., (y-444\cdot45) = 2\cdot408\,(x-141)\ [\because \bar{y} = 444\cdot45]$$

$$ie., \quad y = 2\cdot408x+104\cdot922$$

'y சார்ந்த x' ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு :

$$(x-\bar{x}) = b_{xy}(y-\bar{y})$$

$$ie., (x-141) = \cdot025\,(y-444\cdot45)$$

$$ie., \quad x = \cdot025y+129\cdot889.$$

ஆகவே,

$$b_{yx} = 2\cdot408$$

$$b_{xy} = 0\cdot025$$

$$y = 2\cdot408x+104\cdot922$$

$$x = 0\cdot025+129\cdot889$$

மாதிரி 328

எட்டு ஜோடி தந்தை மகன்களின் உயரங்கள் (அங்குலத்தில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன :

தந்தை உயரம் (x) (அங்குலத்தில்)	65	66	67	67	68	69	71	73
மகன் உயரம் (y) (அங்குலத்தில்)	67	68	64	68	72	70	69	70

இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளை உருவாக்கி, தந்தையின் உயரம் 67·5 அங்குலமாக இருக்கும்பொழுது, மகனின் மதிப்பளவு உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

(ஆக்ரா—1957)

தீர்வு :

இரு ஒட்டுறவுக் கோடுகளை உருவாக்கல் :

x	$d_x=x-69$	d_x^2	y	$d_y=y-69$	d_y^2	$d_x \times d_y$
65	−4	16	67	−2	4	8
66	−3	9	68	−1	1	3
67	−2	4	64	−5	25	10
67	−2	4	68	−1	1	2
68	−1	1	72	3	9	−3
69	0	0	70	1	1	0
71	2	4	69	0	0	0
73	4	16	70	1	1	4
$n=8$	−6	54	$n=8$	−4	42	24

x வரிசையின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma d_x}{n}$

$$= 69 - \frac{6}{8} = 68{\cdot}25$$

y வரிசையின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \frac{\Sigma d_y}{n}$

$$= 69 + \frac{4}{8} = 68{\cdot}5$$

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு b_{yx} :

$$b_{yx} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]}$$

$$b_{yx} = \frac{24 - \frac{(-6) \times (-4)}{8}}{\left[54 - \frac{(-6)^2}{8}\right]}$$

$$= \frac{24 - 3}{54 - 4{\cdot}5} = \frac{21}{49{\cdot}5}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}421} \quad \text{(தோராயமாக)}$$

'y சார்ந்த x'-ன் கூட்டுறவுக் கெழு b_{xy} :

$$b_{xy} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}$$

$$= \frac{24 - \frac{(-6) \times (-4)}{8}}{\left[42 - \frac{(-4)^2}{8}\right]}$$

$$= \frac{24 - 3}{42 - 2} = \frac{21}{40}$$

$$= 0{\cdot}524 \quad \text{(தோராயமாக)}$$

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு :

$$(y - \bar{y}) = b_{yx} (x - \bar{x})$$

$$ie.\ (y - 68{\cdot}5) = 0{\cdot}421 (x - 68{\cdot}25)$$

$$i e.\ y = 0{\cdot}421x + 39{\cdot}77$$

'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு :

$$(x - \bar{x}) = b_{xy} (y - \bar{y})$$

$$i.e.\ (x - 68{\cdot}25) = 0{\cdot}524 (y - 68\ 5)$$

$$i.e.\ x = 0{\cdot}524y + 32{\cdot}29.$$

$x = 67{\cdot}5$ ஆக இருப்பின், y-ன் மதிப்பளவைக் கண்டுபிடிக்க 'x' சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டுச் சமன்பாட்டை உபயோகிக்க வேண்டும்.

$$x = 67{\cdot}5 \text{ என்றால்,}$$

$$y = 0{\cdot}421x + 39{\cdot}77$$

$$= 0{\cdot}421 \times 67{\cdot}5 + 39{\cdot}77$$

$$= 68{\cdot}19$$

மாதிரி 329

புள்ளியியல் பாடத்தில் ஒரு மாணவக் குழு வாங்கிய மதிப்பெண்களை (100-க்கு) கீழ்க் காணும் அட்டவணை தருகின்றது.

பேப்பர் *I*	45	55	56	58	60	65	68	70	75	80	85
பேப்பர் *II*	56	50	48	60	62	64	65	70	74	82	90

மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடு ஒட்டுறவுக் கோட்டுச் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

(பி.எஸ்சி.—அண்ணமலை—1945)

தீர்வு :

இடையுறவுக் கெழு; ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் கணக்கிடல்.

பேப்பர் *I*			பேப்பர் *II*			
மதிப் பெண்கள் (100க்கு) x	ஊகச் சராசரி (65) லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	மதிப் பெண்கள் (100க்கு) y	ஊகச் சராசரி (70) லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	விலக்கங்களின் பெருக்கல் $(d_x \times d_y)$
45	—20	400	56	—14	196	280
55	—10	100	50	—20	400	200
56	—9	81	48	—22	484	198
58	—7	49	60	—10	100	70
60	—5	25	62	—8	64	40
65	0	0	64	—6	36	0
68	3	9	65	—5	25	—15
70	5	25	70	0	0	0
75	10	100	74	4	16	40
80	15	225	82	12	144	180
85	20	400	90	20	400	400
$n = 11$	2	1414	$n = 11$	—49	1865	1393

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க் காணும் மதிப்புக்களை அடைகிறோம்.

$$n = 11; \quad \Sigma d_x = 2; \quad \Sigma d_x^2 = 1414;$$
$$\Sigma d_y = -49; \quad \Sigma d_y^2 = 1865; \quad \Sigma d_x d_y = 1393.$$

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)\times(\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right] + \left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

$$r = \frac{1393 - \frac{2x-49}{11}}{\sqrt{\left[1414 - \frac{(2)^2}{11}\right] + \left[1865 - \frac{(49)^2}{11}\right]}}$$

$$= \frac{15323+98}{\sqrt{(15554-4)\times(20515-2401)}} = \frac{15421}{\sqrt{15550 \times 18114}}$$

$$= 0{\cdot}918$$

'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுக்கெழு b_{xy}

$$b_{xy} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}$$

$$= \frac{1393 + \frac{2\times 49}{11}}{\left[1865 - \frac{(49)^2}{11}\right]} = \frac{1401{\cdot}9}{1646{\cdot}7}$$

$$= 0{\cdot}85$$

'x சார்ந்த y-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு b_{yx} :

$$b_{yx} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]}$$

$$= \frac{1393 - \frac{2x-49}{11}}{\left[1414 - \frac{(2)^2}{11}\right]} = \frac{1401 \cdot 9}{1413 \cdot 6}$$

$$= 0 \cdot 99$$

முதல் பேப்பரின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma d_x}{n}$

$$= 65 + \frac{2}{11} = 65 \cdot 2$$

இரண்டாம் பேப்பரின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \frac{\Sigma d_y}{n}$

$$= 70 + \frac{-49}{11} = 65 \cdot 55$$

'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$(x - \bar{x}) = b_{xy}(y - \bar{y})$$

i.e., $(\bar{x} - 65 \cdot 5) = 0 \cdot 85(y - 65 \cdot 55)$

i,e , $x = 0 \cdot 85y + 9 \cdot 48$

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - \bar{y}) = b_{yx}(x - \bar{x})$$

i.e., $(y - 65 \cdot 55) = 0 \cdot 99(x - 65 \cdot 2)$

i.e., $\mathbf{y = 0 \cdot 99x + 1}$

மாதிரி 389

கீழ்க் காணும் அட்டவணையில் தரப்பட்ட x, y வரிசைகளுக்கு இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடு. 'x சார்ந்த y' என்ற ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாட்டையும் எழுது.

x	78	89	97	69	59	79	68	61
y	125	137	156	112	107	136	123	108

x மாறிக்கு 69 ஐயும், y மாறிக்கு 112 ஐயும் வேகச் சராசரியாகக் கொள்.

(எம்.காம்.—டில்லி.—1953)

தீர்வு :

இடையுறவுக் கெழுவையும், 'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடித்தல்:

x			y			$d_x \times d_y$
x	$d_x = (x-69)$	d_x^2	y	$d_y = (y-112)$	d_y^2	
78	9	81	125	13	169	117
89	20	400	137	25	625	500
97	28	784	156	44	1936	1232
69	0	0	112	0	0	0
59	—10	100	107	— 5	25	50
73	10	100	136	24	576	240
68	— 1	1	123	11	121	— 11
61	— 8	64	108	—4	16	32
$n = 8$	48	1530	$n = 8$	108	3468	2160

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க் காண்பவற்றை அடைகிறோம்.

$$n = 8; \qquad \Sigma d_x = 48; \qquad \Sigma d_x^2 = 1530;$$
$$\Sigma d_y = 108; \qquad \Sigma d_y^2 = 3468; \qquad \Sigma d_x d_y = 2160.$$

x வரிசையின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma d_x}{n}$

$$= 69 + \frac{48}{8} = 75$$

y வரிசையின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \dfrac{\Sigma d_y}{n}$

$$= 112 + \frac{108}{8} = 125{\cdot}5$$

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழு :

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \dfrac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right] \times \left[\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_y)^2}{n}\right]}}$$

$$= \frac{2160 - \dfrac{48 \times 108}{8}}{\sqrt{\left[1530 - \dfrac{(48)^2}{8}\right] \times \left[3468 - \dfrac{(108)^2}{8}\right]}}$$

$$= \frac{2160-648}{\sqrt{(1530-288) \times (3468-1458)}}$$

$$= \frac{706}{\sqrt{621 \times 1005}} = \frac{706}{789}$$

$$= 0{\cdot}957$$

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு காணல் :

$$b_{yx} = \frac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]}$$

$$= \frac{2160 - \dfrac{48 \times 108}{8}}{\left[1530 - \dfrac{(48)^2}{8}\right]} = \frac{1512}{1242}$$

$$= 1{\cdot}22 \quad \text{(தோராயமாக),}$$

ஆகையால் $(y-\bar{y}) = b_{yx}(x-\bar{x})$

$$(y-125{\cdot}5) = 1{\cdot}22\,(\bar{x}-75)$$

அல்லது $y = 1{\cdot}22x + 34$

மாதிரி 331

15 மாவட்டங்களின், கோதுமை, உருளைக் கிழங்கு விளைச்சலைக் கீழ்வரும் பட்டியல் தருகின்றது. இடையுறவுக் கெழுவைக் கண்டு பிடி. கோதுமை விளைச்சல் 33 கன எடையாக இருப்பின், உருளைக் கிழங்கின் மதிப்பிடத்தக்க விளைச்சலைக் கண்டுபிடி.

கோதுமை (கன எடையில்)	16	20	17	16	15	18	14	12	13	14	15	12	11	10	12
உருளைக் கிழங்கு (கன எடையில்)	5	6	6	8	6	6	5	7	4	6	7	4	6	3	6

(அண்ணாமலை — 1948)

தீர்வு :

ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் 'கோதுமையின் எடை சார்ந்த உருளைக் கிழங்கின்'' ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடித்தல் :

கோதுமை (கன எடையில்)			உருளைக் கிழங்கு (கன எடையில்)			பெருக்கல் $d_x \times d_y$
x	$dx=(x-15)$	d_x^2	y	$dy=(y-5)$	d_y^2	
16	1	1	5	0	0	0
20	5	25	6	1	1	5
17	2	4	6	1	1	2
16	1	1	8	3	9	3
15	0	0	6	1	1	0
18	3	9	6	1	1	3
14	−1	1	5	0	0	0
12	−3	9	7	2	4	−6
13	−2	4	4	−1	1	2
14	−1	1	6	1	1	−1
15	0	0	7	2	4	0
12	−3	9	4	−1	1	3
11	−4	16	6	1	1	−4
10	−5	25	3	−2	4	10
12	3	9	6	1	1	3
	−4	111		8	30	20

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து நாம் அடைவது:

$n = 15; \quad \Sigma d_x = -4; \quad \Sigma d_x^2 = 111; \quad \Sigma d_y = 8$

$\Sigma d_y^2 = 30; \quad \Sigma d_x d_y = 20.$

கோதுமை எடையின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d_x}{n}$$

$$= 15 + \frac{4}{15}$$

$$= 15 - 0{\cdot}267$$

$$= 14{\cdot}733$$

உருளைக் கிழங்கு எடையின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{y} = B + \frac{\Sigma d_y}{n}$$

$$= 5 + \frac{8}{15}$$

$$= 5 + 0{\cdot}533$$

$$= 5{\cdot}533$$

இடையுறவுக் கெழு காணும் சூத்திரம்

$$= \frac{20 - \frac{(-4)(8)}{15}}{\sqrt{\left[111 - \frac{(-4)^2}{15}\right]\left[30 - \frac{(8)^2}{15}\right]}}$$

$$= \frac{300 + 32}{\sqrt{1649 \times 386}}$$

$$= \frac{332}{797{\cdot}8}$$

$$= 0{\cdot}22$$

கோதுமையின் எடை சார்ந்த உருளைக் கிழங்கின் ஒட்டுறவுக் கோடு காணல் ;

$$b_{yx} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)\ (\Sigma d_y)}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]}}$$

$$= \frac{20 - \frac{(-4)\ (8)}{15}}{\sqrt{111 - \frac{(-4)^2}{15}}}$$

$$= \frac{332}{1649} = 0{\cdot}2 \text{ (தோராயமாக)}$$

ஆகையால்,

$$(y - \bar{y}) = b_{yx}\,(x - \bar{x})$$

$$(y - 5{\cdot}533) = 0{\cdot}2\ (x - 14{\cdot}733)$$

$$y = 0{\cdot}2x + 2{\cdot}5867$$

அல்லது, கோதுமையின் விளைச்சல் 33 கன எடை எனில் உருளைக் கிழங்கின் கன அளவு மதிப்பு :

$x = 33$ எனில்,

$$y = 0{\cdot}2 \times 33 + 2{\cdot}5867$$

$$= 9{\cdot}1867 \text{ (கன அளவு)}$$

மாதிரி 332

கீழ்க் காணும் பட்டியல், பத்து விற்பனையாளர்களின் அறிவுப் போட்டியில் பதிந்த மதிப்பெண்களையும், அவர்களின் வார விற்பனையையும் கொடுக்கிறது :

விற்பனையாளர்கள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
போட்டியின் மதிப்பெண்கள்	40	70	50	60	80	50	90	40	60	60
விற்பனை (ஆயிரத்தில்)	2·5	6·0	4·5	5·0	4·5	2·0	5·5	3·0	4·5	3·0

'போட்டி மதிப்பெண்களைச் சார்ந்த விற்பனை' ஒட்டுறவுக் கோட்டைக் கணக்கிட்டு, விற்பனையாளர் 70 போட்டி மதிப்பெண்களை அடைந்தால், அதற்குச் சரியாக நிகழக்கூடிய வார விற்பனையை மதிப்பிடு.

(ஐ.ஏ.எஸ்.—1948)

தீர்வு :

'போட்டி மதிப்பெண்களைச் சார்ந்த விற்பனை' ஒட்டுறவுக் கோட்டைக் கணக்கிடல் :

போட்டி மதிப்பெண்கள் x	$d_x = \left(\frac{x-60}{10}\right)$	d_x^2	விற்பனை y	$d_y = \left(\frac{y-4}{5}\right)$	d_y^2	$(d_x \times d_y)$
40	−2	4	2·5	−3	9	6
70	1	1	6·0	+1	1	4
50	−1	1	4·5	1	1	−1
60	0	0	5·0	2	4	0
80	2	4	4·5	1	1	2
50	−1	1	2·0	−4	16	4
90	3	9	5·5	3	9	9
40	−2	4	3·0	−2	4	4
60	0	0	4·5	1	1	0
60	0	0	3·0	−2	4	0
$n = 10$	0	24	$n = 10$	1	65	28

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க் காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$n = 10; \quad \Sigma d_x = 0; \quad \Sigma d_x^2 = 24;$$

$$\Sigma d_y = 1; \quad \Sigma d_y^2 = 65; \quad \Sigma d_x d_y = 28.$$

போட்டி மதிப்பெண்கள் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \frac{\Sigma d_x}{n} \times c$

$$= 60 + 0 = 60$$

வார விற்பனையின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = B + \frac{\Sigma d_y}{n} \times c$

$$= 4 + \frac{1}{10} \times 5$$

$$= 4{\cdot}05$$

'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுக் கெழு b_{yx} :

$$b_{yx} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x)+(\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]} \times \left\{\frac{(10 \times \cdot 5)}{(10 \times 10)}\right\}$$

($\because$ x-ன் விலக்கத்தை 10 ஆல் வகுப்பதாலும்; y-ன் விலக்கத்தை 5 ஆல் வகுப்பதாலும்.)

$$= \frac{28 - \frac{0+1}{10}}{\left(24 - \frac{0^2}{10}\right)} \times \frac{1}{20} = \frac{28-0}{24-0} \times \frac{1}{20} = \frac{28}{480}$$

$$= 0{\cdot}06 \text{ (தோராயமாக)}$$

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு :

$$(y - \bar{y}) = b_{yx}(x - \bar{x})$$

$$(y - 4{\cdot}05) = 0{\cdot}06\,(x - 60)$$

அல்லது $y = 0{\cdot}06x - (0{\cdot}06 \times 60) + 4{\cdot}05$

i.e. $y = 0{\cdot}06x + 0{\cdot}45$

$x = 70$ ஆக இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பு

$$y = (0{\cdot}06 \times 70) + 0{\cdot}45$$

$$= 4{\cdot}65$$

மாதிரி 333

கீழ்க் காணும் பட்டியல், 17 வயது நிரம்பிய பெரிய மாணவக் குழுவிலிருந்து ராண்டம் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்ட 10 மாணவர் களின் உயரத்தையும் (x-அங்குலத்தில்) எடையையும் (y—பவுண் டில்) கொடுக்கிறது :

X	61	68	68	64	65	70	63	62	64	67
Y	112	123	130	115	110	125	100	113	116	126

69 அங்குலம் உயரமுள்ள மாணவனின் எடையை மதிப்பிடுக.

(ஐ. ஏ. எஸ்.—1960)

தீர்வு :

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு காணல் :

உயரம் (X — அங்குலத்தில்)			எடை (Y — பவுண்டில்)			விலக்கங் களின் பெருக்கல் $(d_x \times d_y)$
X	(65) லிருந்து விலக்கம் d_x	விலக்க வர்க்கம் d_x^2	*Y*	(117)லிருந்து விலக்கம் d_y	விலக்க வர்க்கம் d_y^2	
61	—4	16	112	— 5	25	20
68	3	9	123	6	36	18
68	3	9	130	13	169	39
64	—1	1	115	— 2	4	2
65	0	0	110	— 7	49	0
70	5	25	125	8	64	
63	—2	4	100	—17	289	34
62	—3	9	113	— 4	16	12
64	—1	1	116	— 1	1	1
67	2	4	126	9	81	18
652	2	78	1170	0	734	

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க் காணும் மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன :

$$n = 10; \quad \Sigma x = 652; \quad \Sigma d_x = 2; \quad \Sigma d_x^2 = 78;$$
$$\Sigma y = 1170; \quad \Sigma d_y = 0; \quad \Sigma d_y^2 = 734; \quad \Sigma d_x d_y = \;;$$

உயரத்தின் கூட்டுச் சராசரி $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{652}{10} = 65{\cdot}2.$

எடையின் கூட்டுச் சராசரி $= \frac{\Sigma y}{n} = \frac{1170}{10} = 117.$

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு காணல் :

$$b_{yx} = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{(\Sigma d_x) \times (\Sigma d_y)}{n}}{\left[\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{n}\right]}$$

$$= \frac{184 - \frac{(2) \times (0)}{10}}{\left[78 - \frac{(2)^2}{10}\right]}$$

$$= \frac{184-0}{78-{\cdot}4} = \frac{184}{77{\cdot}6} = 2{\cdot}37$$

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டுச் சமன்பாடு காணல் :

$$(y - \bar{y}) = b_{yx}(x - \bar{x})$$

அல்லது $(y - 117) = 2{\cdot}37\ (x - 65{\cdot}2)$

உயரம் $x = 69$ அங்குலமாக இருக்கும் பொழுது எடை y-ன் மதிப்பைக் காணல் :

$$(y - 117) = 2{\cdot}37\ (x - 65{\cdot}2)$$

அல்லது $(y - 117) = 2{\cdot}37\ (69 - 65{\cdot}2)$

$$y = (2{\cdot}37 \times 3{\cdot}8) + 117$$

$$= 9{\cdot}01 + 117$$

$$= 126{\cdot}01$$

ஆகவே, 69 அங்குலங்கள் உயரமுடைய மாணவனின் மதிப்பிடப்பட்ட எடை 126·01 பவுண்டுகளாகும்.

மாதிரி 334

கீழ்க் காணும் பட்டியலில் இரு மாறிகள் X, Y களின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

X	48	50	53	49	51	55	53	49
Y	36	32	33	38	37	31	35	30

1) இடையுறவுக் கெழு
2) இரு ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகள்
3) $y=34$, எனில் x—ன் மதிப்பு
4) $x=47$, எனில் y—ன் மதிப்பு
5) இரு ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள்

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

X			Y			விலக்கங்களின் பெருக்கல் $x' \times y'$
X	சராசரி (51) லிருந்து விலக்கம் (x')	விலக்க வர்க்கம் (x'^2)	Y	சராசரி (34) லிருந்து விலக்கம் (y')	விலக்க வர்க்கம் (y'^2)	
48	—3	9	36	2	4	—6
50	—1	1	32	—2	4	2
53	2	4	33	—1	1	—2
49	—2	4	38	4	16	—8
51	0	0	37	3	9	0
55	4	16	31	—3	9	—12
53	2	4	35	1	9	2
49	—2	4	30	—4	16	8
408		42	272		60	—16

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து கீழ்க் காணும் மதிப்புகளை அடை கிறோம்.

$$\Sigma x = 408; \quad \Sigma x'^2 = 42; \qquad \Sigma x'y' = -16.$$
$$\Sigma y = 272; \quad \Sigma y'^2 = 60:$$

x மாறியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{408}{8}$

$= 51$

y மாறியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{272}{8}$

$= 34$

(1) x, y மாறிகளின் இடையுறவுக் கெழுவினைக் காணல் :

கார்ல் பியர்சனின் இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம்

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)+(\Sigma y'^2)}}$$

$$\therefore \quad r = \frac{-16}{\sqrt{42 \times 60}} = \frac{-16}{50 \cdot 2} = -0 \cdot 3$$

(தோராயமாக)

இங்கு, $\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{42}{8}} = \sqrt{5 \cdot 25} = 2 \cdot 3$

$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n}} = \sqrt{\frac{60}{8}}$

$= \sqrt{7 \cdot 5} = 2 \cdot 7$

(2) ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகள் கணக்கிடல் :

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு :

$$(y - \bar{y}) = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

$$i.e., \quad (y-34) = \frac{(-3)\times(2\cdot7)}{2\cdot3}(x-51)$$

அல்லது $(y-34) = -0\cdot35\,(x-51)$

அல்லது $y = -0\cdot35x+51\cdot85$ ஆகும்.

'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு :

$$(x-\bar{x}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})$$

$$i.e., \quad (x-51) = \frac{(-0\cdot3)\times(2\cdot3)}{2\cdot7}(y-34)$$

அல்லது $(x-51) = -0\cdot26\,(y-34)$

அல்லது $x = -0\cdot26\,y+59\cdot84$

(3) $y = 34$ ஆக இருக்கும்பொழுது :

$$\begin{aligned} x &= -0\cdot26y+59\cdot84 \\ &= (-0\cdot26)\times(34)+59\cdot84 \\ &= -8\cdot84+59\cdot84 \\ &= 51 \end{aligned}$$

ஆகவே $y=34$ ஆக இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பு **51** ஆகும்.

(4) $x = 47$ ஆக இருக்கும்பொழுது :

$$\begin{aligned} y &= (-0\cdot35)\times x + 51\cdot85 \\ &= (-0\cdot35)\times 47 + 51\cdot85 \\ &= -16\cdot45 + 51\cdot85 \\ &= 35\cdot4. \end{aligned}$$

ஆகவே, $x = 47$ ஆக இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பு 35·4 ஆகும்.

(5) **ஒட்டுறவுக் கெழுக்களைக் கணக்கிடல் :**

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு $= b_{yx}$

அதாவது, $b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{(-\cdot3)\times(2\cdot3)}{2\cdot7} = -0\cdot26$

$= -\mathbf{0\,26}.$

'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு $= b_{xy}$.

$$\text{அதாவது } b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{(-0{\cdot}3)\times(2{\cdot}7)}{2{\cdot}3}$$

$$= -0{\cdot}35$$

ஆகவே,

1. இடையுறவுக் கெழு $= -0{\cdot}3$ (தோராயமாக)

2. 'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு $y = -(0{\cdot}35)\,x + 51{\cdot}85$.

   'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு $x = -0{\cdot}26y + 59{\cdot}84$.

3. $y = 34$ எனில் x-ன் மதிப்பு $= 51$.

4. $x = 47$ எனில் y ன் மதிப்பு $= 35{\cdot}4$.

5. 'x சார்ந்த y' ன் ஒட்டுறவுக் கெழு $= -0{\cdot}26$.

   'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு $= -0{\cdot}35$

தொகுப்பு விவரங்களுக்கு (Grouped Data) ஒட்டுறவு

மாதிரி 335

கீழ்க் காணும் பட்டியலுக்கு, x, y மாறிகளின் இடையுறவுக் கெழுவையும், இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் கண்டுபிடி :

x / y	30–34	35–39	40–44	45–49	50–54	55–59	மொத்தம்
80–90	2	3	2				7
90–100		2	5	4	2		13
100–110		4	8	5	1		18
110–120			2	3	1	1	7
120–130	1			2	1	1	5
மொத்தம்	3	9	17	14	5	2	50

y - மாறி		x - மாறி 30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	மொத்தம் f	dy	fdy	fdy^2	fdxdy
பிரிவு	மத்திய மதிப்பு	32	37	42	47	52	57					
80-90	85	[8] 2 [4]	[6] 3 [2]	[0] 2 [0]				7	-2	-14	28	1·4
90-100	95		[2] 2 [1]	[0] 5 [0]	[-4] 4 [-1]	[-4] 2 [-2]		13	-1	-13	13	-6
100-110	105		[0] 4 [0]	[0] 8 [0]	[0] 5 [0]	[0] 1 [0]		18	0	0	0	0
110-120	115			[0] 2 [0]	[3] 3 [1]	[2] 1 [2]	[3] 1 [3]	7	1	7	7	8
120-130	125				[4] 2 [2]	[4] 1 [4]	[6] 1 [6]	5	2	10	20	10
மொத்தம் f		3	9	17	14	5	2	50	—	10	68	26
dx		-2	-1	0	1	2	3	—				
dx		-6	-9	0	14	10	6	15				
dx^2		12	9	0	14	20	18	73				
fdxdy		4	8	0	3	2	9	26				

A = 42 ; B = 105 ;

$$dx = \frac{x - 42}{5}$$

$$dy = \frac{Y - 105}{10}$$

மேற்கண்ட பட்டியலின் மூலம் கீழ்க் காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$\Sigma f = 50$; $\Sigma f d_x = 15$; $\Sigma f d_x^2 = 73$;

$\Sigma f d_y = -10$; $\Sigma f d_y^2 = 68$; $\Sigma f d_x d_y = 26$;

x, y-களின் இடையுறவுக் கெழுச் சூத்திரம் :

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y - \dfrac{(\Sigma f d_x) \times (\Sigma f d_y)}{(\Sigma f)}}{\sqrt{\left[\Sigma f d_x^2 - \dfrac{(\Sigma f d_x)^2}{(\Sigma f)}\right] \times \left[\Sigma f d_y^2 - \dfrac{(\Sigma f d_y)}{(\Sigma f)}\right]}}$$

$$r = \frac{26 - \dfrac{15 \times -10}{50}}{\sqrt{\left[73 - \dfrac{15^2}{50}\right] \times \left[68 - \dfrac{(-10)^2}{50}\right]}}$$

$$= \frac{0{\cdot}58}{\sqrt{1{\cdot}37 \times 1{\cdot}32}} = \mathbf{0{\cdot}43}$$

x மாறியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma f d_x}{\Sigma f} \times c$

$$= 42 + \frac{15}{50} \times 5 = \mathbf{43{\cdot}5}$$

y மாறியின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{y} = B + \dfrac{\Sigma f d_y}{\Sigma f} \times c$

$$= 105 - \frac{10}{50} \times 10 = \mathbf{103}$$

'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுக் கெழு :

$$b_{yx} = \frac{\Sigma f d_x d_y - \dfrac{(\Sigma f d_x) \times (\Sigma f d_y)}{(\Sigma f)}}{\left[\Sigma f d_x^2 - \dfrac{(\Sigma f d_x)^2}{(\Sigma f)}\right]} \times \left[\frac{5 \times 10}{5 \times 5}\right]$$

$$= \frac{26 - \dfrac{15 \times -10}{50}}{\left[73 - \dfrac{(15)^2}{50}\right]} \times \frac{2}{1} = \mathbf{0{\cdot}84}$$

'*y* சார்ந்த *x*' ஒட்டுறவுக்கெழு :

$$b_{xy} = \frac{\Sigma f d_x d_y - \frac{(\Sigma f d_x) \times (\Sigma f d_y)}{(\Sigma f)}}{\left[\Sigma f d_y^2 - \frac{(\Sigma f d_y)^2}{(\Sigma f)}\right]} \times \left[\frac{5 \times 10}{10 \times 10}\right]$$

$$= \frac{26 - \frac{15 \times -10}{50}}{\left[68 - \frac{(-10)^2}{50}\right]} \times \frac{1}{2} = 0 \cdot 22$$

'*x* சார்ந்த *y*' ஒட்டுறவுக் கோட்டுச் சமன்பாடு :

$$(y - \bar{y}) = b_{yx}(x - \bar{x})$$

i.e. $(y - 103) = 0{\cdot}84\,(x - 43{\cdot}5)$

அல்லது $y = \mathbf{0{\cdot}84}x + \mathbf{66}.$

'*y* சார்ந்த *x*' ஒட்டுறவுக் கோட்டுச் சமன்பாடு :

$$(x - \bar{x}) = b_{xy}(y - \bar{y})$$

$$(x - 43{\cdot}5) = 0{\cdot}22\,(y - 103)$$

அல்லது $x = \mathbf{0{\cdot}22}y + \mathbf{22}.$

மாதிரி 336

x y, என்ற இரு மாறிகளின் சராசரிகள் முறையே 65, 67. அவைகளின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 2·5, 3·5. அவற்றிற் கிடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழு 0·8 எனில்,

(i) இரு ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகளைக் காண்.

(ii) $y = 70$ எனில் *x*-ன் பொருத்தமான மதிப்பீட்டு எண்ணைக் கணக்கிடுக.

(iii) அவ்வாறு மதிப்பிட்ட *x*-ன் மதிப்பை *x*-ன் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பாகக் கொண்டு, அதன் '*y*' மதிப்பைக் குறிப்பிடுக.

(பி.ஏ—மதுரை—1970)

தீர்வு :

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் :

$\bar{x} = 65; \quad \bar{y} = 67;$

$\sigma_x = 2{\cdot}5; \quad \sigma_y = 3{\cdot}5 \quad r_{xy} = 0{\cdot}8$

(1) இரு ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகளைக் காணல் :

(a) 'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு :

$$(y-\bar{y}) = b_{yx}(x-\bar{x})$$

அல்லது, $$(y-\bar{y}) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

$$(y-67) = \frac{0{\cdot}8 \times 3{\cdot}5}{2{\cdot}5}(x-65)$$

$$(y-67) = 1{\cdot}12(x-65)$$

$$y = 1{\cdot}12x - 580$$

(b) 'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு :

$$(x-\bar{x}) = b_{xy}(y-\bar{y})$$

அல்லது, $$(x-\bar{x}) = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})$$

அல்லது, $$(x-65) = \frac{0{\cdot}8 \times 2{\cdot}5}{3{\cdot}5}(y-67)$$

$$(x-65) = 0{\cdot}571(y-67)$$

அல்லது, $$x = 0{\cdot}571y - 26{\cdot}743$$

(2) $y=70$ எனில் x-ன் பொருத்தமான மதிப்பைக் காணல் :

'y சார்ந்த x'-ன் மதிப்பு:

$$x = 0{\cdot}571(70)+26{\cdot}743$$

$$= 39{\cdot}97+26{\cdot}743$$

$$= 40{\cdot}0+26{\cdot}743$$

$$= 66{\cdot}743$$

$y=70$ எனில், x-ன் மதிப்பு $= 66{\cdot}743$

(3) $x=66{\cdot}743$-எனில் y-ன் மதிப்பைக் காணல் :

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு :

$$y = 1{\cdot}12x - 5{\cdot}80$$

$x = 66{\cdot}743$ எனில் $$y = 1{\cdot}12(66{\cdot}743) - 5{\cdot}80$$

$$= 75{\cdot}75216 - 5{\cdot}80$$

$$= 69{\cdot}95216$$

முதல் (2)-ல் கிடைத்த x-ன் மதிப்பை பிரதியிடக் கிடைக்கும் y-ன் மதிப்பு :

$$y = 69.95216$$

மாதிரி 337

x-ன் மேல், y-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு $5y = 6x+22$,

y-ன் மேல், x-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு $4y = 9x+5$

என்றால் x, y களின், இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோட்டுக் கெழுக்களையும் இடையுறவுக் கெழுவையும், கூட்டுச் சராசரியையும் கணக்கிடுக.

(பி.ஏ.—சென்னை—1971)

தீர்வு :

(1) x, y—இவைகளின் இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோட்டுக் கெழுக்களைக் கணக்கிடல் :

x-ன் மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு

$$5y = 6x+22$$

அல்லது, $$y = \frac{6}{5}x + \frac{22}{5}$$

ஆகவே, 'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் கெழு :

$$b_{yx} = \frac{6}{5}$$

y-ன் மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு :

$$4y = 9x+5$$

அல்லது $$x = \frac{4}{9}y + \frac{5}{9}$$

ஆகவே, y சார்ந்த x-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் கெழு :

$$b_{xy} = \frac{4}{9}$$

(2) x, y-களின் இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

$$r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{6}{5} \times \tfrac{4}{9}}$$

$$= \sqrt{0.5333}$$

(3) x, y-களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடல் :

இரு ஒட்டுறவுக் கோடுகளும் கூட்டுச் சராசரிகளால் உண்டாக்கிய புள்ளி வழியே செல்லும்.

ஆகவே,

$$5\bar{y} = 6\bar{x}+22$$

$$4\bar{y} = 9\bar{x} + 5$$

மேற்கண்ட ஒட்டுறவுக் கோடுகளைத் தீர்த்து $\bar{x}$, $\bar{y}$ மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

ஆகவே, $\bar{x} = 3$

$\bar{y} = 8$

மாதிரி 338

y சார்ந்த x, x சார்ந்த y என்ற இரு தொடர்புக் கோடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

$$y = 0.80x+25$$

$$x = 0.45y+30$$

x, ஒரு yஐத் தொடர்பு படுத்தும் இடையுறவுக் கெழுவின் மதிப்பையும், x, y-ன் கூட்டுச் சராசரிகளையும் கணிக்க.

$\sigma_x : \sigma_y = 3 : 4$ என நிறுவுக.

(பி.ஏ.—மதுரை—1971)

தீர்வு :

(1) x, y இவைகளின் இரண்டு 'x சார்ந்த y', 'y சார்ந்த x' ஒட்டுறவுக் கோட்டுக் கெழுக்களைக் கணக்கிடல்:

'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுக் கோட்டுக் கெழு :

$$y = 0.8x + 25$$

y சார்ந்த x-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு

$$x = 0.45\,y + 30$$

ஆகவே, $b_{yx} = 0.8$

$b_{xy} = 0.45$

எனவே, $r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$

$= \sqrt{0{\cdot}8 \times 0{\cdot}45}$

$= \sqrt{0{\cdot}360}$

$= \mathbf{0{\cdot}6}$

(2) x, y-மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

$\bar{x}, \bar{y}$ என்ற புள்ளி வழியே இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளும் செல்கின்றன.

ஆகவே,

$$\bar{y} = 0{\cdot}8\bar{x} + 25$$

$$\bar{x} = 0{\cdot}45\bar{y} + 30$$

மேற்கண்ட இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்த பின்பு $\bar{x}, \bar{y}$ ஆகிய மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$\bar{x} = 30{\cdot}703125$$

$$\bar{y} = 1{\cdot}5625$$

(3) $\sigma_x, \sigma_y = 3 : 4$ என்று நிறுவுதல் :

ஒட்டுறவுக் கோடுகள்

$$y = 0{\cdot}8x + 25$$

$$x = 0{\cdot}45y + 30$$

இடையுறவுக் கெழு $r_{xy} = 0{\cdot}6$

ஆகவே, $b_{xy} = \dfrac{r\sigma_y}{\sigma_x} = 0{\cdot}8$

அல்லது, $\dfrac{0{\cdot}6\sigma_y}{\sigma_x} = 0{\cdot}8$

அல்லது, $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = \dfrac{0{\cdot}6}{0{\cdot}8}$

i.e., $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{3}{4}$

அல்லது, $\sigma_x : \sigma_y = 3 : 4$

மாதிரி 339

கீழ்க் காணும் விவரங்களிலிருந்து கல்கத்தாவிலுள்ள பொருளின் விலை ரூபாய் 68-க்குச் சமமாகிய பம்பாயிலுள்ள அதே பொருளின் விலையை மதிப்பிடு.

கல்கத்தாவிலுள்ள கூட்டுச் சராசரி விலை	= ரூ. 64
பம்பாயிலுள்ள கூட்டுச் சராசரி விலை	= ரூ. 66
கல்கத்தாவிலுள்ள திட்ட விலக்கம்	= ரூ. 1·5
பம்பாயிலுள்ள திட்ட விலக்கம்	= —3·5
இடையுறவுக் கெழு	= —0·6

(பி.ஏ.—சென்னை—1972)

தீர்வு :

பொருள்களின் கல்கத்தா விலைகளை x மாறி எனவும், பொருள்களின் பம்பாய் விலைகளை y மாறி எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஆகவே,

$\bar{x}$ = கல்கத்தாவிலுள்ள கூட்டுச் சராசரி விலை = ரூ. 64·0

$\bar{y}$ = பம்பாயிலுள்ள கூட்டுச் சராசரி விலை = ரூ 66·0

σ_x = கல்கத்தாவிலுள்ள திட்ட விலக்கம் = ரூ. 1·5

σ_y = பம்பாயிலுள்ள திட்ட விலக்கம் = ரூ. 3·5

r_{xy} = இடையுறவுக் கெழு = —0·6

x-சார்ந்த y-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு :

$$(y-\bar{y}) = b_{yx}(x-\bar{x})$$

அல்லது $$(y-\bar{y}) = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

ஆகவே, $$(y-\bar{y}) = -\frac{0·6\times3·5}{1·5}(x-64)$$

$$(y-66) = -1·4\,(x-64)$$

அல்லது $$y = -1·4x+155·6$$

கல்கத்தாவில் பொருளின் விலை ரூ.66 எனில், அப்பொருளின் பம்பாய் விலை

$$y = -1·4x+155·6$$

$x = 66$ எனில் $y = -1{\cdot}4\,(66) + 155{\cdot}6$

$= -92{\cdot}4 + 155{\cdot}6$

$=$ ரூ. **63·2**

மாதிரி 340

y சார்ந்த x, x சார்ந்த y என்ற இரு தொடர்புக் கோடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

$$y = 0{\cdot}9x + 2{\cdot}3,$$
$$x = 0{\cdot}4y + 0{\cdot}36.$$

x, y-ன் கூட்டுச் சராசரிகளையும், அவை இரண்டினையும் இணைக்கும் இடையுறவுக் கெழுவினையும் கணக்கிடுக.

(பி.ஏ.—மதுரை—1972)

தீர்வு :

(1) x, y-மாறிகளை இணைக்கும் இடையுறவுக் கெழு காணல்:

'x சார்ந்த y' இடையுறவுக் கோடு

$$y = 0{\cdot}9x + 2{\cdot}3$$

ஆகவே, $b_{yx} = 0{\cdot}9$

'y சார்ந்த x' இடையுறவுக் கோடு

$$x = 0{\cdot}4y + 0{\cdot}36$$

ஆகவே, $b_{xy} = 0{\cdot}4$

இங்கு, $r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$

$\sqrt{0{\cdot}9 \times 0{\cdot}4}$

$= \sqrt{0{\cdot}26}$

$= \mathbf{0{\cdot}6}$

இடையுறவுக் கெழு $r_{xy} = \mathbf{0{\cdot}6}$

(2) x, y-மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடல் :

இரண்டு இடையுறவுக் கோடுகள்

$$y = 0{\cdot}9x + 2{\cdot}3$$
$$x = 0{\cdot}4y + 0{\cdot}36.$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளி வழியே இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளும் செல்கின்றன.

ஆகவே, $\bar{y} = 0{\cdot}9\bar{x} + 2{\cdot}3$

$$\bar{x} = 0{\cdot}4\bar{y} + 0{\cdot}36$$

மேற்கண்ட இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்த பின்பு $\bar{x}, \bar{y}$ மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$\bar{x} = 2$$

$$\bar{y} = 4{\cdot}1$$

மாதிரி 341

கீழ்க் காணும் விவரங்களிலிருந்து கல்கத்தாவிலுள்ள பொருளின் ரூ. 70-க்குச் சமமாகிய பம்பாயிலுள்ள அதே பொருளின் விலையை மதிப்பிடு.

கல்கத்தாவிலுள்ள பொருளின் கூட்டுச் சராசரி	= ரூ. 65
பம்பாயிலுள்ள பொருளின் கூட்டுச் சராசரி	= ரூ. 67
கல்கத்தாவிலுள்ள திட்ட விலக்கம்	= ரூ. 2·5
பம்பாயிலுள்ள திட்ட விலக்கம்	= ரூ. 3·5

பொருளின் இரு நகர விலைகளுக்குள்ள இடையுறவுக் கெழு = 0·8

(எம்.ஏ.—ஆக்ரா—1954)

(எம்.காம்.—ஆக்ரா—1954)

தீர்வு :

கல்கத்தாவிலுள்ள விலையை x மாறியாகவும், பம்பாயிலுள்ள விலையை y மாறியாகவும் கொண்டு மேற்கண்ட விவரங்களைக் கீழ்க் காணுமாறு எழுதலாம்.

$$\bar{x} = 65; \quad \bar{y} = 67;$$

$$\sigma_x = 2{\cdot}5; \quad \sigma_y = 3{\cdot}5; \quad r = 0{\cdot}8,$$

கல்கத்தாவின் விலை (x) ரூ. 70 ஆக இருக்கும்பொழுது பம்பாயின் விலையை (y) மதிப்பிட வேண்டும். ஆதலால் முதலில் x இயைந்த y-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக்

கணக்கிடவேண்டும். இந்தச் சமன்பாடு கீழ்க்காணுமாறு இருக்கின்றது.

$$(y-\overline{y}) = r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\times(x-\overline{x})$$

அல்லது $$(y-67) = \frac{0{\cdot}8\times3{\cdot}5}{2{\cdot}5}\times(x-65)$$

அதாவது $$(y-67) = 1{\cdot}12\times(x-65)$$

$x = 70$ ஆக இருக்கும்பொழுது,

$$(y-67) = 1{\cdot}12\,(70-65)$$

$$= 1{\cdot}12\times5 = 5{\cdot}60$$

$$\therefore\quad y = 67+5{\cdot}6 = \mathbf{72{\cdot}6}$$

ஆகையால் கல்கத்தாவில் விலை ரூ. 70 ஆக இருக்கும் பொழுது பம்பாயில் அப்பொருளின் விலை ரூ. 72·6 ஆக மதிப்பிடப்படுகிறது.

மாதிரி 342

ஓரளவு அழிந்துபோன சோதனைச் சாலையின் இடையுறவு பற்றிய ஆய்வுக் குறிப்பேட்டில் கீழ்க்காணும் குறிப்புகள் மட்டுமே அழியாமலிருந்தன.

x-ன் மாறுபாடு $= 9$

ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகள் :

$8x-10y+66=0$ ('x இயைந்த y'-ன் சமன்பாடு)

$40x-18y-214=0$ ('y-இயைந்த x'-ன் சமன்பாடு)

(a) x, y களின் கூட்டுச் சராசரி

(b) y-ன் திட்ட விலக்கம்

(c) x, y களின் இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழு ஆகியவைகளைக் கணக்கிடு.

(ஐ.ஏ.எஸ்.—1947)

தீர்வு :

(*a*) x, y களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிடல் :

ஒட்டுறவுக் கோடுகள், x, y களின் கூட்டுச் சராசரிகளின் வழியே ஊடுருவிச் செல்வதால், கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கிறோம்.

$$8\bar{x}-10\bar{y}=-66 \qquad \cdots (1)$$

$$40\bar{x}-18\bar{y}=214 \qquad \cdots (2)$$

1-வது சமன்பாட்டை இரு பக்கமும் 5ஆல் பெருக்கி 2-வது சமன்பாட்டிலிருந்து கழித்தால், கீழ்க் காண்பதை அடைகிறோம்.

$$40\bar{x}-18\bar{y}=214 \quad (2)$$

$$40\bar{x}-50\bar{y}=-330$$

$$32\bar{y}=544$$

அல்லது $\bar{y}=\frac{544}{32}=17$

$\bar{y}=17$, என 1-வது சமன்பாட்டில் போட்டால், கீழ்க் காண்பவற்றை அடைகிறோம்.

$$8\bar{x}-170=-66$$

$$8\bar{x}=104$$

$$\bar{x}=\frac{104}{8}=13$$

ஆகவே x, y களின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 13, 17 ஆகும்.

(*b*) x, y களின் இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

1-வது சமன்பாட்டிலிருந்து

$$y=\frac{8}{10}x+\frac{66}{10} \qquad \cdots (3)$$

2-வது சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x=\frac{18}{40}y+\frac{214}{40} \qquad \cdots (4)$$

ஆகவே, (3), (4) எனும் இரு நேர் கோட்டுச் சமன்பாடுகள் முறையே 'x சார்ந்த y', 'y சார்ந்த x' எனும் ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளாகும்.

$$r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = b_{yx},\ r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = b_{xy}$$ என்று தெரியும்.

ஆகவே, (3) லிருந்து $b_{yx} = \frac{8}{10}$ ... (5)

(4) லிருந்து $b_{xy} = \frac{18}{40}$ ... (6)

b_{yx}-ஐயும், b_{xy}-ஐயும் பெருக்கினால் $b_{yx} \times b_{xy} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \times r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$$= r^2$$

$$\therefore r^2 = \frac{8}{10} \times \frac{18}{40} = \frac{36}{100} = 0{\cdot}36$$

$i.e.,\quad r = +0{\cdot}6$

b_{yx}, b_{xy} கள், + ஆக இருப்பதால்,

இடையுறவுக் கெழு $r = +0{\cdot}6$ ஆகும்.

(a) y-ன் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடல் :

(6) லிருந்து $r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{18}{40}$ எனக் காண்கிறோம்.

(இங்கு $r = 0{\cdot}6$, $\sigma_x^2 = 9$)

ஆதலால்,

$$\frac{0{\cdot}6 \times 3}{\sigma_y} = \frac{18}{40}$$

$$ie.,\quad \sigma_y = \frac{0{\cdot}6 \times 3 \times 40}{18} = 4$$

ஆகவே y-ன் திட்ட விலக்கம் 4 எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 343

$$x + 2y = 5$$
$$2x + 3y = 8$$

ஆகிய இரண்டும் இரு ஒட்டுறவுக் கோட்டுச் சமன்பாடுகளாகும்.

$$\sigma_x^2 = 12.$$

$\bar{x}, \bar{y}, \sigma_y^2, r$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடு.

(எம். ஏ.—சென்னை.—1952)

தீர்வு :

(a) $\bar{x}, \bar{y}$ களைக் கணக்கிடல்.

கொடுத்துள்ள இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளும் $\bar{x}$ $\bar{y}$ களின் வழியே செல்வதால், $\bar{x}$, $\bar{y}$ களைக் கணக்கிட, கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவேண்டும்.

$$\bar{x}+2\bar{y} = 5 \quad \dots (1)$$

$$2\bar{x}+3\bar{y} = 8 \quad \dots (2)$$

(2)வது சமன்பாட்டிலிருந்து, (1)வது சமன்பாட்டை 2ஆல் பெருக்கிக் கழிக்கவும்.

$$\begin{array}{r} 2\bar{x} + 3\bar{y} = 8 \quad \dots (2) \\ 2\bar{x} + 4\bar{y} = 10 \\ \hline -\bar{y} = -2 \end{array}$$

ஆகவே $\bar{y} = 2$

$\bar{y} = 2$ என்று (1)-ல் போட்டால், கீழ்.காண்பவற்றை அடைகிறோம்.

$$2\bar{x} = 8—3\times2$$

$$\bar{x} = 1$$

ஆதலால் $\bar{x}, \bar{y}$ களின் மதிப்புகள் முறையே 1,2 ஆகும்.

(b) இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

(1)வது சமன்பாட்டிலிருந்து 'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுக் கோடு

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \quad \dots (3)$$

(2)வது சமன்பாட்டிலிருந்து 'y சார்ந்த x' ஒட்டுறவுக் கோடு

$$x = -\tfrac{3}{2}\, y+4 \quad \dots (4)$$

$$\therefore b_{yx} = -\tfrac{1}{2} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \ldots (5)$$

$$b_{xy} = -\tfrac{3}{2} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad \ldots (6)$$

பெருக்கினால் $b_{yx} \times b_{xy} = (-\tfrac{1}{2}) \times (-\tfrac{3}{2}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \times r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$$ie., \quad r^2 = \frac{3}{4}$$

$$ie., \quad r = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0\ 866$$

b_{yx}, b_{xy} கள், —ஆக இருப்பதால், $r = -0{\cdot}866$

(c) σ_x^2 ஐக் கணக்கிடல் :

கணக்கில் தெரிந்தவைகள் : $r = -0{\cdot}866$

$$0x^2 = 12$$

$$b_{yx} = -\frac{1}{2} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}$$

ஆகவே $\quad b_{yx} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$$ie., \quad -\frac{1}{2} = -0{\cdot}866 \times \frac{\sigma_y}{\sqrt{12}}$$

அல்லது $\quad \sigma_y = \frac{\sqrt{12}}{2 \times 0{\cdot}866} = \frac{\sqrt{12}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sigma_y = 2$$

$$\sigma_y^2 = 4$$

மாதிரி 344

ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் 0·09, 0·16, ஆக இருந்தால் இடையுறவுக் கெழு r-ஐக் கணக்கிடுக.

(எம்.காம்.—சென்னை)

தீர்வு :

$$r^2 = b_{yx} \times b_{xy}$$
$$= 0{\cdot}09 \times 0{\cdot}16$$
$$= 0{\cdot}0144$$
$$\therefore \quad r = \sqrt{0{\cdot}0144} = 0{\cdot}12.$$

b_{yx}, b_{xy}-கள், + ஆக இருப்பதால், $r = +\,0{\cdot}12$ ஆகும்.

$$r = +\,0{\cdot}12$$

மாதிரி 345

கார்ல் பியர்சனின், இடையுறவுக் கெழு r-ன் மதிப்பு -1-க்கும், $+1$-க்கும் இடையே விழுகிறது என நிரூபி.

(பி.எஸ்சி.—சென்னை—1964)

தீர்வு :

$u = \Sigma(y-ax-b)^2$ ஆக இருக்கலாம்.

$\dfrac{\sigma_u}{\sigma_a} = 0$; $\dfrac{\sigma_u}{\sigma_b} = 0$ எனில் u-ன் மதிப்பு குறைக்கப் படுகிறது.

அவை, முறையே, $2\,\Sigma x\,(y-ax-b) = 0$

$$2\,\Sigma(y-ax-b) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\Sigma y = 0 = \Sigma x$ ஆக இருப்பதால் $b = 0$

ஆகையால், மேலும் $a = \dfrac{\Sigma xy}{\Sigma x}$

$$\therefore \quad u = \Sigma(y-ax)^2 = \Sigma_y{}^2 - 2a\ \Sigma xy + a^2\ \Sigma x^2$$

$$= \Sigma y^2 - \frac{2\Sigma xy}{\Sigma_x{}^2} \times \Sigma xy + \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right) \Sigma x^2$$

$$= \Sigma y^2 - \frac{2(\Sigma xy)^2}{\Sigma y^2} + \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma y^2}$$

$$= \Sigma y^2 - \frac{(\Sigma xy)^2_2}{\Sigma x^2}$$

$$= \Sigma y^2 \left\{ 1 - \frac{(\Sigma xy)^2}{(\Sigma x^2) \times (\Sigma y^2)} \right\}$$

$$\left[\because \quad r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2 \times (\Sigma y^2)}} \right]$$

$$= (1 - r^2)\, \Sigma y^2$$

u ஆனது, வர்க்கங்களின் கூட்டலாக இருப்பதால், *u*-ன் மதிப்பு எதிரிடை (—) எண்ணுக இராது. அதேபோல் Σy^2-ம் (—) எதிரிடை எண்ணுக இராது.

ஆதலால், $(1 - r^2) \geqslant 0$

$$r^2 \leqslant 1$$

இதன் பொருள்: *r*-ன் மதிப்பு, —1-க்கும், +1-க்கும் இடையே விழுகிறது என்பது ஆகும்.

r-ன் எல்லை, — 1-லிருந்து + 1 வரை ஆகும்.

மாதிரி 346

$r \geqslant 0$ என இருக்கும்பொழுது இரு மாறிகளின் இடையுறவுக் கெழுக்களின் கூட்டுச் சராசரியின் மதிப்பு அவைகளின் இடையுறவுக் கெழுவை விடப் பெரிதாக இருக்கிறது என்று நிரூபி.

தீர்வு :

இங்கு, $\dfrac{\dfrac{r\sigma_y}{\sigma_x} + \dfrac{r\sigma_x}{x_y}}{2} > r$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

அல்லது $\sigma_y^2 + \sigma_x^2 > 2\sigma_x\sigma_y \qquad (\because \; r > 0)$

அல்லது $(\sigma_y - \sigma_x)^2 > 0$

இது உண்மை. ஆகவே கேட்டது நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டது.

மாதிரி 347

(*a*) *x*, *y* என்ற இரு மாறிகளின் இரு ஒட்டுறவுக் கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள θ என்பது குறுங்கோணமென்ருல் (acute angle)

$$\tan\theta = \frac{1 - r^2}{r} \times \frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

என நிரூபி. (இங்கு r, σ_x, σ_y என்பன வழக்கமான பொருளைக் கொண்டுள்ளன.

(b) $r=0$ ஆகவும், $r=\pm 1$ ஆகவும் இருக்கும்பொழுது, மேற்கண்ட சூத்திரத்தின் சிறப்புத் தன்மையை (significance) விவரி.

(பி.எஸ்.சி. சென்னை—1964)

(பி.எஸ்.சி.—ஆக்ரா—1955, 1959, 1961)

தீர்வு :

(a) படுக்கை அச்சு x மேல், மேற்கண்ட இரு ஒட்டுறவுக் கோடுகள் முறையே θ_1, θ_2 என்ற கோணங்களை உண்டாக்கினால்,

$$\tan\ \theta_1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x};\quad \tan\theta_2 = \frac{\sigma^y}{r\sigma_x}\ \text{ஆகும்.}$$

ஆதலால், $\tan\theta = \tan(\theta_2 \sim \theta_1)$

$$= \frac{\dfrac{\sigma_y}{r\sigma_x} \sim \dfrac{r\sigma_y}{\sigma_x}}{1+\dfrac{\sigma_y}{r\sigma_x}\quad\dfrac{r\sigma_y}{\sigma_x}} = \frac{1-r^2}{r} \times \frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x{}^2 \times \sigma_y{}^2}$$

ஆகவே, கேட்டவை நிரூபிக்கப்பட்டு விட்டன.

(b) $r=\pm 1$ ஆக இருக்கும் பொழுது,

$\tan\theta\quad 0$. ஆதலால், $\theta=0$ அல்லது π ஆகும். இப்படி இருக்கும் பொழுது, இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளும் ஒன்றுகின்றன; ஆதலின் x, y ஆகிய இரு மாறிகளுக்கு இடையே முழு அளவு இடையுறவு திகழ்கிறது.

$r=0$ ஆக இருக்கும்பொழுது, $\theta = \frac{\pi}{2}$. ஆகவே இரு ஒட்டுறவுக்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கின்றன. ஆதலின் x-ன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் மதிப்பிடப்பட்ட y-ன் மதிப்புகள் மாறுவதில்லை. இதேபோல் எல்லா y-ன் மதிப்புகளுக்கும், x-ன் மதிப்பிடப்பட்ட மதிப்புகளும் மாறுவதில்லை.

மாதிரி 348

x, y என்ற இரண்டு சார்பிலா மாறிகள் முறையே 5, 10 ஆகிய மதிப்புகளைக் கூட்டுச் சராசரியாகவும், 4, 9 ஆகிய மதிப்புகளை முறையே மாறுபாடுகளாகவும் கொண்டுள்ளன.

$$u=(3_x+4_y);\quad v=(3x-y)$$

எனக் கொண்ட u, v மாறிகளின் இடையுறவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடு.

(பி. ஏ.— சென்னை—1964)

இங்கு, $E(u)=3E(x)+4E(y)$; $E(v)=3E(x)-E(y)$

ஆதலால் $u-E(u)=3[x+E(x)]+4[y-E(y)]$

$v-E(v)=3[x-E(x)]-[y-E(y)]$

$\therefore$ உடன்மாற்றம் (u, v)

$=E[(u-\bar{u})\ (v-\bar{v})]$

$=9E[(x-\bar{x})^2]-4E[(y-\bar{y})^2]+9E(x-\bar{x})(y-\bar{y})$

$=9$மாற்றம் $(x)-4$ மாற்றம் $(y)+0$

($\because$ x, y மாறிகளின் சார்பற்றவை)

$=9\times 4-4\times 9=0$

$$\therefore\ r=\frac{\text{உடன் மாற்றம் } (u,v)}{\sigma_u\sigma_v}=0$$

மாதிரி 349

x,y மாறிகளின் இடையுறவுக் கெழு

$$r=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

எனக் காண்பி. (இங்கு σ_x^2, σ_y^2, σ_{x-y}^2) ஆகியவை முறையே x,y, $(x-y)$களின் மாறுபாடுகளாகும்.)

(பி.காம்.—சென்னை—1954)

$$\sigma^2(x-y)=E(x-y)^2$$

$$=E(x)^2+E(y)^2-2E(x,y)$$

$$=\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\text{ உடன்மாற்றம் }(x,y)$$

$$\therefore\ \text{உடன்மாற்றம் }(x,y)=\tfrac{1}{2}(\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_{(x-y)}^2$$

$$\therefore\ r=\frac{\text{உடன்மாற்றம் }(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

மாதிரி 350

கீழ்க் காணும் புள்ளி விவரத்திற்கேற்ற உறவுக்கோடுகளைக் காண்க.

$\bar{x} = 150$பவு.; $\sigma_n = 20$பவு.; $N = 1000$; $\bar{y} = 68$ அங்.;

$\sigma_y = 2{\cdot}5''$; $\Sigma xy = 10230000.$

(அண்ணமலை—1951)

தீர்வு :

மேற்கண்ட புள்ளி விவரங்களின்படி,

$$r = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{x} \times \bar{y}}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{10,230,000}{1000} - 150 \times 68}{20 \times 2{\cdot}5}$$

$$= \frac{10,230 - 10,200}{50} = \frac{30}{50}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}6}$$

இரு ஒட்டுறவுக் கோடுகளைக் கணக்கிடல் :

'*x* சார்ந்த *y*' ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு :

$$(y - \bar{y}) = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

அல்லது $(y - 150) = \dfrac{0{\cdot}6 \times 20}{2{\cdot}5} (x - 68)$

i.e. $(y - 150) = 4{\cdot}8 \, (x - 68)$

'*y* சார்ந்த *x*' ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு :

$$(x - \bar{x}) = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \times (y - \bar{y})$$

அல்லது $(x - 68) = \dfrac{0{\cdot}6 \times 2{\cdot}5}{20} \times (y - 150)$

அதாவது, $(x - 68) = 0{\cdot}75 \, (y - 150)$

ஆகவே, ஒட்டுறவுக் கோடுகள் முறையே :

(i) 'x சார்ந்த y'; $y = 4{\cdot}8\,x - 176{\cdot}4$.

(ii) 'y சார்ந்த x'; $x = 0{\cdot}75\,y - 44{\cdot}5$.

மாதிரி 351

ஒரு புள்ளியியல் தேர்வில் A, B என்ற பாடங்களில் சில மாணவர் எடுத்த மதிப்பெண்களைக் கீழ்க் காணும் பட்டியல் தருகின்றது:

A என்ற பாடத்தில் எடுத்த கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்	$= 39{\cdot}5$
B என்ற பாடத்தில் எடுத்த கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண்	$= 47{\cdot}5$
A-ல் எடுத்த மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கம்	$= 10{\cdot}8$
B-ல் எடுத்த மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கம்	$= 16{\cdot}8$
A, B-க்கு இடையிலுள்ள இடையுறவுக் கெழு	$= 0{\cdot}42$

இரண்டு ஒட்டுறவுக் கோடுகளைக் கணக்கிட்டு, ஏன் இரு ஒட்டுறவுக் கோடுகள் இருக்கின்றன என்பதை விவரி.

பாடம் A-ல் 50 மதிப்பெண்கள் எடுத்துள்ள மாணவர்கள் பாடம் B-ல் எடுக்கும் மதிப்பெண்களை மதிப்பிடு.

(ஐ.ஏ.எஸ்.—1941)

தீர்வு :

பாடம் A ன் மதிப்பெண்களை x எனவும், பாடம் B-ன் மதிப்பெண்களை y எனவும் கொண்டு கீழ்க் காண்பவற்றை அடைகிறோம்.

$$\bar{x} = 39{\cdot}5; \qquad \bar{y} = 47{\cdot}5;$$
$$\sigma_x = 10{\cdot}8; \qquad \sigma_y = 16{\cdot}8; \qquad r = +0{\cdot}42;$$

'x சார்ந்த y' ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு :

$$y - \bar{y} = \frac{r \times \sigma_y}{\sigma_x} \times (x - \bar{x})$$

அல்லது $$(y - 47{\cdot}5) = \frac{0{\cdot}42 \times 16{\cdot}8}{10{\cdot}8} \times (x - 39{\cdot}5)$$

அல்லது $$(y - 47{\cdot}5) = 0{\cdot}65 \times (x - 39{\cdot}5)$$

அல்லது $$y = 0{\cdot}65x + 21{\cdot}825$$

$x=50$ ஆக இருக்கும்பொழுது,

$$y = 0{\cdot}65\times(50+21{\cdot}825) = 54{\cdot}325 \text{ ஆகும்.}$$

'y சார்ந்த x' ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு :

$$(x-\bar{x}) = r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\times(y-\bar{y})$$

$$\text{அல்லது } (x-39{\cdot}5) = \frac{0{\cdot}42\times10{\cdot}8}{16{\cdot}8}\times(y-47{\cdot}5)$$

$$\therefore\ x = 0{\cdot}27\,y+26{\cdot}675$$

மாதிரி 352

இரு x,y மாறிகள் பூச்சியத்தைக் கூட்டுச் சராசரியாகவும் ஒரே σ^2 ஐ, அவைகளின் மாறுபாடாகவும், பூச்சியத்தை இடையுறவுக் கெழுவாகவும் கொண்டுள்ளன.

$$u=x\cos\alpha+y\sin\alpha\ ;\quad v=x\sin\alpha-y\cos\alpha$$

என்ற u,v மாறிகள் ஒரே σ^2ஐ மாறுபாடாகவும், பூச்சியத்தை இடையுறவுக் கெழுவாகவும் கொண்டுள்ளன எனக் காட்டு.

(பி.ஏ.—டெல்லி—1952)

$$\sigma_u^2 = \cos^2\alpha\,\sigma_x^2+\sin^2\alpha\,\sigma_y^2+2\sin\alpha\cos\alpha \text{ உடன்மாற்றம் } (x,y)$$

$$= \sigma^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

உடன்மாற்றம் $(x,y)=0$ ($\because$ x,y பூச்சியத்தை இடையுறவுக் கெழுவாகக் கொண்டுள்ளன.)

$$= \sigma^2$$

அதேபோல், $\sigma v^2=\sigma^2$

உடன்மாற்றம் $(u,v) = E(u-\bar{u})(v-\bar{v})$

$$= E(x\cos\alpha+y\sin\alpha-\bar{x}\cos\alpha-\bar{y}\sin\alpha)(x\sin\alpha-y\cos\alpha-\bar{x}\sin\alpha-\bar{y}\cos\alpha)$$

$$= E(x\cos\alpha+y\sin\alpha)(x\sin\alpha-y\cos\alpha)\ (\because\ \bar{x}=\bar{y}=0)$$

$$= E(x^2\cos\alpha\sin\alpha)-E(y^2\sin\alpha\cos\alpha)+E[(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)xy]$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha\,\sigma^2-\sin\alpha\cos\alpha\,\sigma^2+(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha) \text{ உடன்மாற்றம் } (x,y) = 0$$

ஆதலால் u, v மாறிகளுக்கு இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

மாதிரி 353

$x = 0{\cdot}85\,y$, $y = 0{\cdot}89x$, $\sigma_x = 3$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், (a) σ_y, (b) r ஆகியவைகளைக் காண். (எம்.காம்.—1964)

தீர்வு :

(b) 'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு அல்லது b_{xy} :

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{\cdot}85$$

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு அல்லது b_{xy} :

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{\cdot}89$$

$$\therefore\ r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}} = \sqrt{0{\cdot}85 \times 0{\cdot}89} = \sqrt{0{\cdot}7505}$$
$$= 0{\cdot}87$$

ஆகவே $r = 0{\cdot}87$

(a) σ_y ஐக் கணக்கிடல் :

$$\text{இங்கு, } r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{\cdot}85$$

$$\text{அல்லது } 0{\cdot}85\sigma_y = r \times \sigma_x$$

$$\text{அல்லது } \sigma_y = \frac{r \times \sigma_x}{0{\cdot}85}$$

$$\text{அதாவது } \sigma_y = \frac{0{\cdot}87 \times 3}{0{\cdot}85} = 3{\cdot}07$$

ஆகவே $\sigma_y = 3{\cdot}07$

மாதிரி 354

1000 தமிழ் நாட்டுக் காவலர்களின் உயரத்திற்கும் (x), எடைக்கும் (y) உள்ள தொடர்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

சராசரி உயரம் = 68 அங்குலங்கள்.

சராசரி எடை = 150 பவுண்டுகள்

திட்ட விலக்கம் σ_x = 2·5 அங்குலங்கள்

திட்ட விலக்கம் σ_y = 20 பவுண்டுகள்

இடையுறவுக் கெழு r = 0·6

மேற்கண்ட விவரங்களிலிருந்து (a) 200 பவுண்டு எடையுள்ள ஜான் டியோ என்ற காவலரின் உயரத்தையும் (b) 5 அடிகள் உயரமுள்ள ரிச்சர்டு ரோ என்ற காவலரின் எடையையும் மதிப்பிடுக.

(சென்னைப் பல்கலைக் கழகம்)

தீர்வு :

இங்கு $\bar{x} = 68$; $\bar{y} = 150$; $\sigma_x = 2{\cdot}5$;

$\sigma_y = 20$; $r = 0{\cdot}6$.

(a) 'எடை சார்ந்த உயரம்' ஒட்டுறவுக் கோட்டினைக் கணக்கிடல் :

$$(x-\bar{x}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})$$

$$(x-68) = \frac{0{\cdot}6\times 2{\cdot}5}{20}(y-150)$$

$$(x-68) = 0{\cdot}75\,(y-150)$$

எடை $(y) = 200$ ஆக உயரத்தின் மதிப்பு காணல் :

$$(x-68) = 0{\cdot}75\,(200-150)$$

$$\therefore\ x = 105{\cdot}5 \text{ அங்குலங்கள்.}$$

ஆகவே 200 பவுண்டுகள் எடையுள்ள ஒரு காவலரின் உயரம் 105·5" என மதிப்பிடப்படுகிறது.

(b) 'உயரம் (x) சார்ந்த எடை (y)'-ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டினைக் கணக்கிடல் :

$$(y-\bar{y}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

$$(y-150) = \frac{0{\cdot}6\times 20}{2{\cdot}5}(x-68).$$

$$(y-150) = 4{\cdot}8\,(x-68)$$

உயரம் 60 அங்குலம் ஆக இருக்கும்பொழுது, எடையின் மதிப்பைக் காணல் :

$$(y-150) = 4{\cdot}8\,(x-68)$$

$$(y-150) = 4{\cdot}8\,(60-68)$$

$$y = 112{\cdot}6 \text{ பவுண்டுகள்.}$$

ஆகவே ஐந்தடி உயரமுள்ள குறிப்பிட்ட காவலரின் எடை 112·6 பவுண்டுகளாக மதிப்பிடப்படுகிறது.

மாதிரி 355

240 முழு மதிப்புகளுக்குக் கீழ்க் காணும் விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன :

$$\overline{X_1} = 28{\cdot}02; \quad \sigma_1 = 4{\cdot}42; \quad r_{12} = 0{\cdot}8;$$
$$\overline{X_2} = 4{\cdot}91; \quad \sigma_2 = 1{\cdot}10; \quad r_{13} = -0{\cdot}4;$$
$$\overline{X_3} = 594; \quad \sigma_3 = 85; \quad r_{23} = -0{\cdot}56.$$

'X_2 சார்ந்த X_1' ஒட்டுறவுச் சமன்பாட்டையும்,

'X_3 சார்ந்த X_1' ஒட்டுறவுச் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடி.

(எம். ஏ.—சென்னை—1946)

தீர்வு :

'X_2 சார்ந்த X_1' ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு காணல்:

$$(X_1-\overline{X_1}) = r_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(X_2-\overline{X_2})$$

அல்லது $(X_1-28{\cdot}02) = \dfrac{0{\cdot}8 \times 4{\cdot}42}{1{\cdot}10}(X_2-4{\cdot}91)$

அல்லது $(X_1-28{\cdot}02) = 3{\cdot}215\ (X_2-4{\cdot}91)$

அல்லது $X_1 = 3{\cdot}215\ X_2-15{\cdot}284+28{\cdot}02$

அல்லது $X_1 = 3{\cdot}215\ X_2+12{\cdot}234.$

'X_3 சார்ந்த X_1'—ன் ஒட்டுறவுக் கோட்டின் சமன்பாடு காணல் :

$$(X_1-\overline{X_1}) = \frac{r_{13}\,\sigma_1}{\sigma_3}(X_3-\overline{X_3})$$

அல்லது $(X_1-28{\cdot}02) = \dfrac{(-0{\cdot}4)\times(4{\cdot}42)}{85}(X_3-594)$

அல்லது $(X_1-28{\cdot}02) = (-0{\cdot}021)(X_3-594)$

அல்லது $(X_1-28{\cdot}02) = -0{\cdot}021X_3 + 12{\cdot}474$

அல்லது $X_1 = -0{\cdot}021X_3+12{\cdot}474+28{\cdot}02$

$\therefore \quad X_1 = -0{\cdot}021X_3 + 40{\cdot}494$

மாதிரி 356

ஓர் உறவுப் பட்டியலிலிருந்து கீழ்க்காணும் ஒட்டுறவுச் சமன் பாடுகள் கிடைத்தன:

$$y = 0{\cdot}516x + 33{\cdot}73$$
$$x = 0{\cdot}512x + 32{\cdot}52$$

(*a*) இடையுறவுக் கெழு, (*b*) x மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, (*c*) y மாறியின் கூட்டுச் சராசரி ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(திருவனந்தபுரம்—1953)

(*a*) இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடல் :

'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு

$$y = 0{\cdot}516x + 33{\cdot}73.$$

ஆகவே, 'x சார்ந்த y'-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{\cdot}516$$

'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுச் சமன்பாடு

$$x = 0{\cdot}512y + 32{\cdot}52.$$

ஆகவே, 'y சார்ந்த x'-ன் ஒட்டுறவுக் கெழு

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{\cdot}512.$$

$$r^2 = b_{xy}\times b_{yx} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \times r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{\cdot}516\times 0{\cdot}512$$

$$\therefore\ r = \sqrt{0{\cdot}516\times 0{\cdot}512} = \sqrt{0{\cdot}264192} = 0{\cdot}51$$
$$= 0{\cdot}51$$

(*b*) & (*c*) x, y மாறிகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் $\bar{x}$, $\bar{y}$ கணக்கிடல் :

இரு ஒட்டுறவுக் கோட்டுச் சமன்பாடுகளும் $\bar{x}, \bar{y}$ களின் வழியே செல்வதால் $\bar{x}, \bar{y}$-ன் மதிப்புகள் கணக்கிடக் கீழ்க்காணும் சமன் பாடுகளைத் தீர்வு காணவேண்டும்.

$$0{\cdot}516\bar{x} - \bar{y} = -33{\cdot}73 \quad \ldots (1)$$
$$\bar{x} - 0{\cdot}512\bar{y} = 32{\cdot}52 \quad \ldots (2)$$

(2)ஆவது சமன்பாட்டை 0·516ஆல் பெருக்கி (1)ஆவது சமன் பாட்டில் இருந்து கழிக்க வேண்டும்.

$$
\begin{aligned}
0{\cdot}516\bar{x} - \quad \bar{y} &= -33{\cdot}73 \\
0{\cdot}516\bar{x} - 0{\cdot}264\bar{y} &= 16{\cdot}72 \\
\hline
-0{\cdot}736\bar{y} &= -50{\cdot}45
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{50{\cdot}45}{0{\cdot}736} = 68{\cdot}5$$

$\bar{y} = 68{\cdot}5$ஐ (2)ஆவது சமன்பாட்டில் போட்டால்,

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= 0{\cdot}512 \times 68{\cdot}5 + 32{\cdot}52 \\
&= 35{\cdot}072 + 32{\cdot}52 \\
&= \mathbf{67{\cdot}592}
\end{aligned}
$$

ஆகவே $\bar{x} = 67{\cdot}592$

$\bar{y} = 68{\cdot}50$

மாதிரி 357

இடையுறவுப் பட்டியலிலிருந்து கீழ்க்காணும் ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகள் கிடைத்தன :

$$x = 19{\cdot}13 - 0{\cdot}87y$$
$$y = 11{\cdot}64 - 0{\cdot}50x$$

(*a*) x மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, (*b*) y மாறியின் கூட்டுச் சராசரி, (*c*) x, y மாறிகளின் இடையுறவுக் கெழு ஆகிய வற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகள் :

$$x = 19{\cdot}13 - 0{\cdot}87y$$
$$y = 11{\cdot}64 - 0{\cdot}50x$$

($\bar{x}$, $\bar{y}$) மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டறிதல் :

($\bar{x}$ $\bar{y}$) என்ற புள்ளி வழியே மேற்கண்ட இரு ஒட்டுறவுக் கோடுகளும் செல்கின்றன.

ஆகவே,

$$\bar{x} = 19{\cdot}13 - 0{\cdot}87\bar{y}$$
$$\bar{y} = 11{\cdot}64 - 0{\cdot}50\bar{x}$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்த்த பின்பு, கீழ்க் காணும் மதிப்புகளை அடைகிறோம்.

$$\bar{x} = 15 \cdot 94$$
$$\bar{y} = 3 \cdot 0324$$

x, y மாறிகளின் இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட்டறிதல் :

ஒட்டுறவுக் கோடுகள் :

$$x = 19 \cdot 13 - 0 \cdot 87y$$
$$y = 11 \cdot 64 - 0 \cdot 50x$$

ஆகவே,

$$b_{xy} = -0 \cdot 87$$
$$b_{yx} = -0 \cdot 5$$
$$\therefore \quad r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$
$$= \sqrt{(-0 \cdot 87)\ (-0 \cdot 5)}$$
$$= \sqrt{0 \cdot 435}$$
$$= -0 \cdot 659$$

($\because$ $b_{xy} = -0 \cdot 87$, $b_{yx} = -0 \cdot 5$ இரண்டும் எதிரிடை மதிப்புகளாக இருக்கின்றன.)

மாதிரி 358

60 நிகழ்ச்சிகளின் இடையுறவுப் பகுப்பாய்வில் கீழ்க்காணும் இரு ஒட்டுறவுச் சமன்பாடுகள் கிடைத்தன.

$$5x = 6y + 24$$
$$1000y = 768x - 3608$$

இடையுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு, அதன் ஊகப் பிழையைக் காண்.

(சென்னை—1942)

தீர்வு :

b_{yx}, b_{xy} ஒட்டுறவுக் கெழுக்களாக இருக்கட்டும்.

ஆகவே, $r^2 = b_{yx} \times b_{xy} = \dfrac{768}{1000} \times \dfrac{6}{5}$

$$= 0 \cdot 9216$$
$$\therefore \quad r = \pm 0 \cdot 96$$

இக் கணக்கில் b_{yx}, b_{xy} கள், நேரிடைகளாக + இருக்கின்றன. ஆதலால் $r = +0{\cdot}96$ ஆகும்.

ஊகப் பிழையைக் கணக்கிடல் :

சூத்திரம் :

$$r\text{-ன் ஊகப் பிழை} = \frac{2}{3} \times \frac{(1-r^2)}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore \quad \text{ஊகப் பிழை} = \frac{2}{3} \times \frac{1-(0{\cdot}96)^2}{\sqrt{60}}$$

$$= 0{\cdot}02$$

மாதிரி 359

x,y உறவற்ற இரு மாறிகளாகும்.

$u = x+y$; $v = x-y$

u,v-களுக்கு இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழுவினை, அவ்விரு மாறிகளின் திட்ட விலக்கங்களில் காண்க.

(அண்ணாமலை—1952)

u, v மாறிகளின் இடையுறவுக் கெழு $= r$

$$\text{அதாவது,} \quad r = \frac{\text{உடன் மாறுபாடு } (uv)}{\sqrt{\text{மாறுபாடு } (\bar{x}) \times \text{மாறுபாடு } (y)}}$$

இங்கு, $u = x+y$ ஆதலால் $\bar{u} = \bar{x}+\bar{y}$

$v = x-y$ ஆதலால் $\bar{v} = \bar{x}-\bar{y}$

$$\text{உடன் மாறுபாடு } (xy) = E\,(u-\bar{u})\;(v-\bar{v})$$

$$= E\,(x-\bar{x}+y-\bar{y})\;(x-\bar{x}-y+\bar{y})$$

$$= E\,[\,(x-\bar{x})^2 - (y-\bar{y})^2)\,]$$

$$= E\,(x-\bar{x})^2 - E\,(y-\bar{y})^2$$

$$= \sigma_x{}^2 - \sigma_y{}^2$$

$$\text{மாறுபாடு}(u) = \text{மாறுபாடு } (x+y) = E(x+y)^2$$

$$= E(x^2) + E(y)^2 + 2E(xy)$$

$$= \text{மாறுபாடு}(x) + \text{மாறுபாடு}(y)$$

$$+ 2 \text{ உடன் மாறுபாடு } (x,y)$$

அதேபோல், மாறுபாடு v = மாறுபாடு $(x-y)$
= மாறுபாடு (x) + மாறுபாடு (y)
— உடன் மாறுபாடு $(x\,y)$

மேலும் உடன் மாறுபாடு $(xy) = 0$
($\because$ $x\,y$ உறவற்ற மாறிகள்)

$\therefore$ மாறுபாடு(u) = மாறுபாடு(x) + மாறுபாடு(y)

அல்லது $\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

அதேபோல், $\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

$\therefore$ $r = \dfrac{\text{உடன் மாறுபாடு } (u, v)}{\sqrt{\text{மாறுபாடு}(u) \times \text{மாறுபாடு}(v)}}$

$= \dfrac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

ஆகவே u, v-களுக்கு இடையேயுள்ள இடையுறவுக் கெழு (r)
(x, y மாறிகளின் திட்ட விலக்கங்களில்) $= \dfrac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

மாதிரி 360

0·8, 0·2 என்பன இரு ஒட்டுறவுக் கெழுக்களானல், r-ன் மதிப்பு என்ன ?
(எம்.காம். —டில்லி—1946)

தீர்வு :

இங்கு $b_{yx} = 0{\cdot}8$, $b_{xy} = 0{\cdot}2$ ஆகும்.

$\therefore r^2 = b_{yx} \times b_{xy} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} \times r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = r^2$

ஆகவே, $r^2 = 0{\cdot}8 \times 0{\cdot}2 = 0{\cdot}16$

$r = 0{\cdot}4$

மாதிரி 361

$b_{xy} = 0{\cdot}84$, $b_{yx} = 0{\cdot}4$ எனின் இடையுறவுக் கெழுவினைக் காண்.
(எம்.காம்.—ராஜ்.—1965)

x, y மாறிகளின் இடையுறவு கெழு $r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$

$\therefore r = \sqrt{0{\cdot}84 \times 0{\cdot}4} = \sqrt{0{\cdot}336}$

$= 0{\cdot}58$

மாதிரி 362

கீழ்க்காணும் பட்டியல், 17 வயது நிரம்பிய பெரிய மாணவர் குழுவிலிருந்து ராண்டம் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்ட 10 மாணவர் களின் உயரத்தையும் (x) (அங்குலத்தில்) எடையையும் (y) (பவுண்டில்) கொடுக்கிறது.

X	61	68	68	64	65	70	63	62	64	67
Y	112	123	130	115	110	125	100	113	116	126

69 அங்குல உயரமுள்ள மாணவனின் எடையை மதிப்பிடு.

(ஐ.ஏ.எஸ்.—1960)

மாறு விகிதம் (Ratio of Variation)

மாதிரி 363

கீழ்க் காணும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்ட விற்பனைக்கும், இலாபத்திற்கும் மாறு விகிதத்தைக் (Ratio of Variation) கணக் கிடுக :

ஆண்டு	விற்பனை (லட்சத்தில்)	இலாபம் (லட்சத்தில்)
1940	72	42
1941	84	52
1942	66	48
1943	60	46
1944	48	30
1945	42	28
1946	54	36
1947	63	38
1948	51	34
1949	57	42
1950	69	44
1951	54	40

(எம்.ஏ.—பஞ்சாப்)

தீர்வு : முதல் முறை

மாறு விகிதத்தைக் கணக்கிடல் :

ஆண்டு	விற்பனை (ரூபாய்கள்—லட்சத்தில்)			இலாபம் (ரூபாய்கள்—லட்சத்தில்)			விகிதம் $= \frac{d_y}{d_x}$
	x	சதம்(%) $= \frac{x}{\bar{x}} \times 100$	விலக்கம் $dx = (2) - 100$	y	சதம்(%) $= \frac{y}{\bar{y}} \times 100$	விலக்கம் $d_y = (6) - 100$	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1940	72	120	20	42	105	5	0·25
1941	84	140	40	52	130	30	0·75
1942	66	110	10	48	120	20	2·00
1943	60	100	0	46	115	15	0
1944	48	80	—20	30	75	—25	1·25
1945	42	70	—30	28	70	—30	1·00
1946	54	90	—10	36	90	—10	1·00
1947	63	105	5	38	95	— 5	—1·00
1948	51	85	—15	34	85	—15	1·00
1949	57	95	— 5	42	105	5	—1·00
1950	69	115	15	44	110	10	0·67
1951	54	90	—10	40	100	0	0
$n = 12$	720			480			5·92

x-ன் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{720}{12} = 60$

y-ன் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = \frac{480}{12} = 40$

ஆகவே மாறு விகிதம் (Ratio of Variation) $= \frac{5{\cdot}92}{12} = 0{\cdot}49$ (தோராயமாக)

இரண்டாம் முறை :

ஆண்டுகள்	X		Y		விலக்கங்களின் விகிதம் $\left(\frac{d_y}{d_x}\right)$
	விற்பனை x	சராசரி (60) லிருந்து விலக்கம் d_x	இலாபம் y	சராசரி (40) லிருந்து விலக்கம் d_y	
1940	72	12	42	2	0·167
1941	84	24	52	12	0·500
1942	66	6	48	8	1·333
1943	60	0	46	6	0·000
1944	48	—12	30	—10	0·833
1945	42	—18	28	—12	0·667
1946	54	— 6	36	— 4	0·667
1947	63	3	38	— 2	—0·667
1948	51	— 9	34	— 6	0·667
1949	57	— 3	42	2	—0·667
1950	69	9	44	4	0·44
1951	54	— 6	40	0	0·000
$n=12$	720		480		3·944

x-ன் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{720}{12} = 60.$

y-ன் கூட்டுச் சராசரி $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{480}{12} = 40.$

∴ மாறு விகிதம் (Ratio of Variation)

$= \frac{3{\cdot}944}{12} = 0{\cdot}329$ (தோராயமாக)

x வரிசையில் ஒரு மாற்றம் இருந்தால், y வரிசையில் 0·329 மாற்றம் இருக்கிறது.

கால்டன் வளைகோட்டு முறை

மாறிகளின் மாறு விகிதத்தைக் கணக்கிட, கால்டன் என்பவர் வளைகோட்டு முறையை அறிமுகப்படுத்தினர். எனவே, இவ் வளைகோடு கால்டனின் வளைகோடு என்றே அழைக்கப் படுகிறது. இதனை வரையும் முறை கீழ்வருமாறு :

வரையும் முறை

1. x, y என்ற இரு மாறி மதிப்புகளின் சராசரிகளைத் தனித் தனியே கணக்கிட வேண்டும்.

2. அதனதன், சராசரியின் அடிப்படையில், அதனதன் மதிப்புகளை விகிதப்படுத்தி, சதவீதம் காணவேண்டும். இச் சத வீதங்களின் பரவலின் அளவு (திட்ட விலக்கம்) எந்த மாறி யுடையது கூடுதலாக இருக்கிறதோ, அதனைத் தனித்த மாறியாக வும் (x), மற்றதைச் சார்பு மாறியாகவும் (y) கொள்ள வேண்டும். அப்பொழுதுதான் மாறு விகிதம் 1-க்குக் குறைவாக இருக்கும்.

3. வரைபடத் தாளில், செங்குத்து அச்சில் (நிலை அச்சு—x அச்சு) தனித்த மாறியின் (x) சதவீத மதிப்புகளையும், படுக்கை அச்சில் (கிடை அச்சு—y அச்சு) சார்பு மாறியின் (y) சதவீத மதிப்புகளையும், தக்க அலகு எடுத்து, குறித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

4. புள்ளிகளை வரைபடத்தில், மேற்கண்டவாறு குறித்தால் ஒரு சிதறல் வரைபடம் கிடைக்கும். இப் புள்ளிகளின் ஊடே ஒரு கோடு கீழ் வரும் விதிமுறையின் அடிப்படையில் வரையப் பட வேண்டும்.

(a) இக் கோடு புள்ளிகளைத் தோராயமாக இரு சமபாகங் களாகப் பிரித்துக்கொண்டு ஊடே செல்ல வேண்டும்.

(b) வரையப்பட்ட கோட்டின் இருபக்கப் புள்ளிகள் சம இடைவெளியில் இருக்கவேண்டும்.

(c) இக் கோடு, இரு மாறிகளின் சார்புச் சராசரியான 100 என்ற மதிப்பைக் காட்டும் புள்ளியின் ஊடே செல்ல வேண்டும்.

மேற்கண்டபடி, கோடு வரையப்பட்ட பின்பு. y x-களுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்திற்கு டேன்ஜென்ட் (tangent) காண வேண்டும். இது, yx-களின் இடையேயுள்ள மாறு விகிதத்தைத் தரும். இதன் தலைகீழ் அளவு xy-களின் மாறு விகிதத்தைக்

கொடுக்கும். மேற்கண்ட விதிமுறைகளைக் கீழ்க்காணும் மாதிரி விளக்குகிறது.

மாதிரி 364

கீழ்க்காணும் இரு வரிசைகளுக்கு மாறுபாட்டு விகிதத்தை (Ratio of Variation) கால்டன் வரைபடம் மூலம் கணக்கிடு.

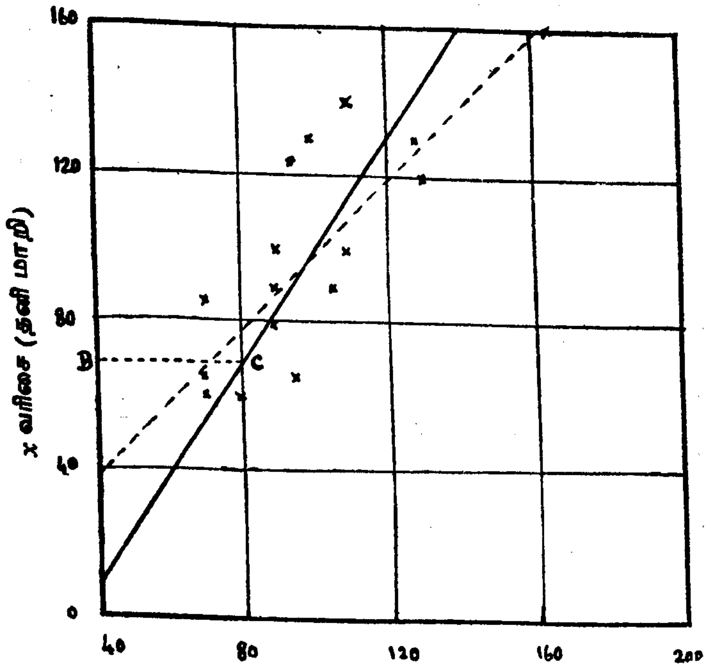
வரிசை எண்	தனித்த மாறி (x)	சார்பு மாறி (y)
1	24	7·0
2	40	9·0
3	36	9·0
4	50	9·5
5	36	10·5
6	26	9·5
7	24	8·0
8	34	7·0
9	52	10·0
10	52	13·0
11	64	16·5
12	56	11·0
13	48	13·0
14	40	11·0
15	32	9·0
16	26	7·0
மொத்தம்	640	160·0

தீர்வு :

மாறு விகிதத்தைக் கணக்கிடல் :

வரிசை எண்	(x)	குறியீட்டு எண்கள் (சராசரியை அடிப் படையாகக் கொண்டவை)	(y)	குறியீட்டுஎண்கள் (சராசரி = 10 ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டவை)
1	24	60	7·0	70
2	40	100	9·0	90
3	36	90	9·0	90
4	50	125	9·5	95
5	36	90	10·5	105
6	26	65	9·5	95
7	24	60	8·0	80
8	34	85	7·0	70
9	52	130	10·0	100
10	52	130	13·0	130
11	64	160	16·5	165
12	56	140	11·0	110
13	48	120	13·0	130
14	40	100	11·0	110
15	32	80	9·0	90
16	26	65	7·0	70
மொத்தம்	640		160·0	
கூட்டுச் சராசரி	40		10·0	

மாறு விகிதத்தைக் காட்டும் கால்டன் வரைபடம் :



———————— சரி மாறுபாட்டுக் கோடு

……-………. ஒட்டுறவுக் கோடு

$$\text{மாறு விகிதம்} = \frac{BC}{BA} = \frac{40}{60}$$

$$= 0{\cdot}66$$

$$\text{ஒட்டுறவு விகிதம்} = (1-0{\cdot}66)$$

$$= 0{\cdot}34.$$

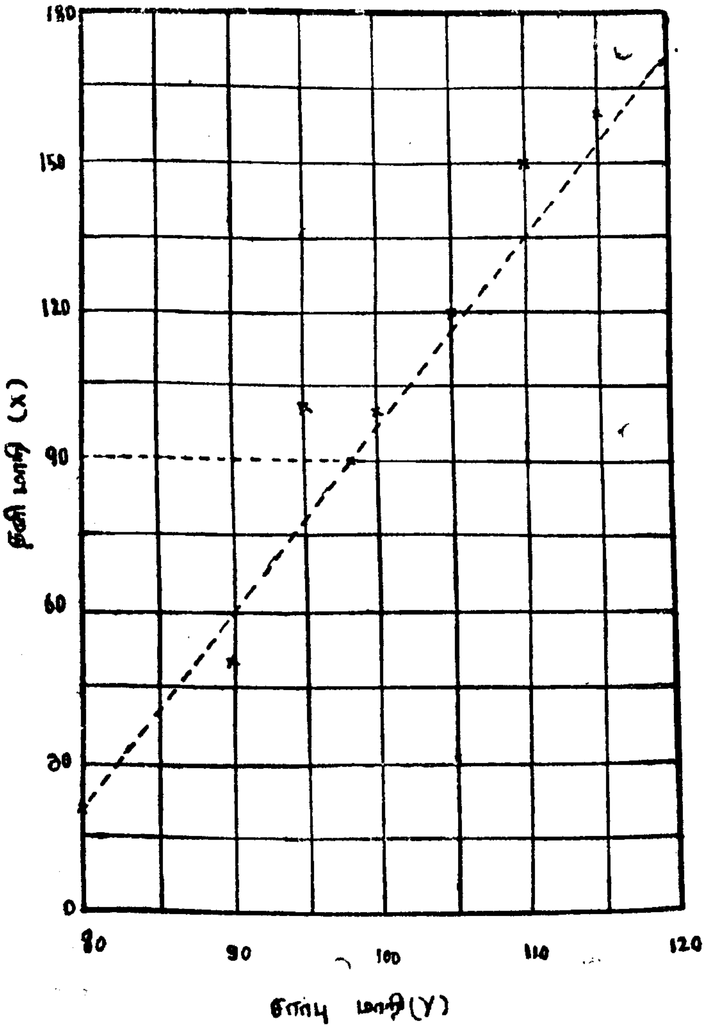
மாதிரி 365

பின் காணும் பட்டியலுக்குக் கால்டன் வரைபடத்தைக் குறித்து, மாறு விகிதத்தைக் (Ratio of Variation) காண்.

ஆண்டு	1	2	3	4	5	6	7	8	9
தனிமாறி (x)	20	30	50	100	100	120	150	160	170
சார்பு மாறி (y)	160	170	180	190	200	210	220	230	240

கால்டன் வரைபடமும், மாறு விகிதமும் காணல் :

ஆண்டுகள்	X வரிசை		Y வரிசை	
	x	குறியீட்டு எண்கள் (சராசரி 100 ஐ அடிப்படையாகக்கொண்டு)	y	குறியீட்டு எண்கள் (சராசரி 200 ஐ அடிப்படையாகக்கொண்டு)
1	20	20	160	80
2	30	30	170	85
3	50	50	180	90
4	100	100	190	95
5	100	100	200	100
6	120	120	210	105
7	150	150	220	110
8	160	160	230	115
9	170	170	240	120
மொத்தம்	900		1800	
சராசரி	100		200	



$$\text{மாறு விகிதம்} = \frac{BA}{BC}$$

$$= \frac{18}{69}$$

$$= 0{\cdot}26$$

$$\text{ஒட்டுறவு விகிதம்} = 1 - 0{\cdot}26$$

$$= 0{\cdot}74$$

மாதிரி 366

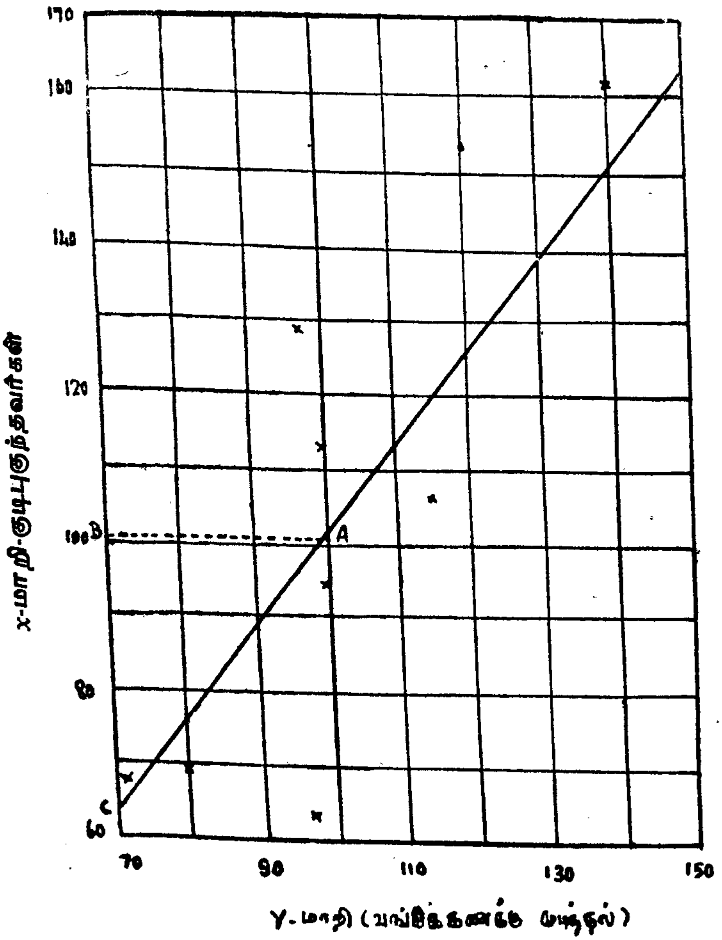
கீழ்க்காணும் பட்டியலிலிருந்து கால்டன் வரைபடத்தைக் குறிக்கவும். 8 *ஆண்டுகளில் வங்கி முடித்தலுக்கும், குடிபுகுந்தவர் களின் எண்ணிக்கைக்கும் இடையேயுள்ள மாறுவிகிதத்தைக் காண்.*

ஆண்டு	குடி புகுந்தவர்கள் (பத்தாயிரங்களில்)	வங்கிக் கணக்கு முடித்தல் (£—மில்லியன்களில்)
1	79	49
2	52	40
3	33	25
4	55	35
5	46	35
6	62	34
7	31	34
8	34	28
சராசரி	49	35

(எம். காம்.—1947)

தீர்வு :

ஆண்டு	குடி புகுந்தவர்கள் (10 ஆயிரங் களில்)	குறியீட்டெண்கள் (சராசரி 49ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு)	வங்கி கணக்கு முடித்தல் (£ மில்லியன் களில்)	குறியீட்டெண்கள் (சராசரி 35ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு)
1	79	161·22	49	140·00
2	52	106·12	40	114·29
3	33	67·55	25	71·43
4	55	112·24	35	100·00
5	46	93·88	35	100·00
6	62	128·57	34	97·14
7	31	63·27	34	97·14
8	34	69·39	28	80·00
மொத்தம்	392		280	
சராசரி	49		35	



மாறு விகிதம் $= \frac{BA}{BC}$

$= \frac{30}{37}$

$= 0{\cdot}818$

ஒட்டுறவு விகிதம் $= 1 - 0{\cdot}818$

$= 0{\cdot}182$

மாதிரி 367

பின் காணும் பட்டியல் ஒரு பொருளின் விலையையும் விற்பனைக்கு வந்த சரக்கு அளவையும் தருகிறது.

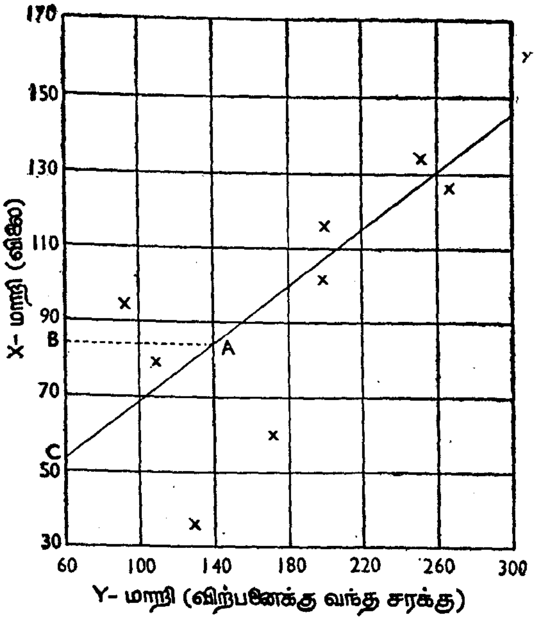
மாதங்கள்	விலை (x)	விற்பனைக்கு வந்த சரக்கு (y)
சனவரி	15	60
பிப்ரவரி	22	30
மார்ச்	40	44
ஏப்ரல்	26	80
மே	34	52
சூன்	58	68
சூலை	50	116
ஆகஸ்ட்	45	100
செப்டம்பர்	70	90
அக்டோபர்	60	140
நவம்பர்	55	120

கால்டன் வரைபடத்தை வரைந்து மாறுவிகிதத்தைக் காண்.

(எம்.ஏ.—1951)

தீர்வு :

மாதங்கள்	விலை	குறியீட்டெண்கள்	விற்பனைக்கு வந்த சரக்கு y	குறியீட்டெண்கள்
சனவரி	15	34·72	60	132·16
பிப்ரவரி	22	50·93	30	66·08
மார்ச்	40	92·59	44	96·91
ஏப்ரல்	26	60·18	80	174·01
மே	34	78·24	52	112·33
சூன்	58	134·26	68	149·78
சூலை	50	115·74	116	255·52
ஆகஸ்டு	45	104·17	100	200·44
செப்டம்பர்	70	162·04	90	198·02
அக்டோபர்	60	138·79	140	308·37
நவம்பர்	55	127·55	120	264·31
மொத்தம்	475	1099·21	900	1957·93
சராசரி	43·2	99·93	81·8	177·99



மாறுவிகித வரைபடம்

$$\text{மாறு விகிதம்} = \frac{BA}{BC}$$

$$= \frac{80}{32}$$

$$= 2{\cdot}5$$

மடக்கை

(Logarithms)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											Mean Differences								
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2001	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3433	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3937	4014	4031	4043	4005	4082	4069	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4083	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4086	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	0551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7437	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9235	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

எதிர்மடக்கை

(Ant-Logarithms)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	15	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

வர்க்கங்கள், மூலங்கள், தலைகீழ்ப் பின்னங்கள்

POWERS, ROOTS AND RECIPROCALS

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1	1	3·162	2·154	4·642	1
2	4	8	1·414	1·260	4·472	2·714	5·848	·5000
3	9	27	1·732	1·442	5·477	3·107	6·694	·3333
4	16	64	2	1·587	6·325	3·420	7·368	·2500
5	25	125	2·236	1·710	7·071	3·684	7·937	·2000
6	36	216	2·449	1·817	7·746	3·915	8·434	·1667
7	49	343	2·646	1·913	8·367	4·121	8·879	·1429
8	64	512	2·828	2·000	8·944	4·309	9·283	·1250
9	81	729	3·000	2·080	9·487	4·481	9·655	·1111
10	100	1000	3·162	2·154	10·000	4·642	10·000	·1000
11	121	1331	3·317	2·224	10·488	4·791	10·323	·09091
12	144	1728	3·464	2·289	10·954	4·932	10·627	·08333
13	169	2197	3·606	2·351	11·402	5·066	10·914	·07692
14	196	2744	3·742	2·410	11·832	5·192	11·187	·07143
15	225	3375	3·873	2·466	12·247	5·313	11·447	·06667
16	256	4096	4·000	2·520	12·649	5·429	11·696	·06250
17	289	4913	4·123	2·571	13·038	5·540	11·935	·05882
18	324	5832	4·243	2·621	13·416	5·646	12·164	·05556
19	361	6859	4·359	2·668	13·784	5·749	12·386	·05263
20	400	8000	4·472	2·714	14·142	5·848	12·599	·0500
21	441	9261	4·583	2·759	14·491	5·944	12·806	·04762
22	484	10648	4·690	2·802	14·832	6·037	13·006	·04545
23	529	12167	4·796	2·844	15·166	6·127	13·200	·04348
24	576	13824	4·899	2·884	15·492	6·214	13·389	·04167
25	625	15625	5·000	2·924	15·811	6·300	13·572	·0400
26	676	17576	5·099	2·962	16·125	6·383	13·751	·03846
27	729	19683	5·196	3·000	16·432	6·463	13·925	·03704
28	784	21952	5·292	3·037	16·733	6·542	14·095	·03571
29	841	24389	5·385	3·072	17·029	6·619	14·260	·03448
30	900	27000	5·477	3·107	17.321	6·694	14·422	·03333
31	961	29791	5·568	3·141	17.607	6·768	14·581	·03226
32	1024	32768	5·657	3·175	17.889	6·840	14·736	·03125
33	1089	35937	5·745	3·208	18.166	6·910	14·888	·03030
34	1156	39304	5·831	3·240	18·439	6·980	15·037	·02941
35	1225	42875	5·916	3·271	18·708	7·047	15·183	·02857
36	1296	46656	6·000	3·302	18·974	7·114	15·326	·02778
37	1369	50653	6·083	3·332	19·235	7·179	15·467	·02703
38	1444	54872	6·164	3·362	19·494	7·243	15·605	·02632
39	1521	59319	6·245	3·391	19·748	7·306	15·741	·02564
40	1600	64000	6.325	3·420	20·000	7·368	15·874	·02500
41	1681	68921	6.403	3·448	20·248	7·429	16·005	·02439
42	1764	74088	6.481	3·476	20·494	7·489	16·134	·02381
43	1849	79507	6.557	3·503	20·736	7·548	16·261	·02326
44	1936	85184	6.633	3·530	20·976	7·606	16·386	·02273
45	2025	91125	6·708	3·557	21·213	7·663	16·510	·02222
46	2116	97336	6·782	3·583	21·448	7·719	16·631	·02174
47	2209	103823	6·856	3·609	21·679	7·775	16·751	·02128
48	2304	110592	6·928	3·634	21·909	7·830	16·869	·02083
49	2401	117649	7·000	3·959	22·136	7·884	16·985	·02041

வர்க்கங்கள் மூலங்கள், தலைகீழ்ப் பின்னங்கள்
POWERS, ROOTS AND RECIPROCALS

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100}$	$\frac{1}{n}$
50	2500	125000	7·071	3·684	22·361	7·937	17·100	·020
51	2601	132651	7·141	3·708	22·583	7·990	17·213	.01961
52	2704	140608	7·211	3·733	22·804	8·041	17·325	·01923
53	2809	148877	7·280	3·756	23·322	8·093	17·435	·01887
54	2916	157464	7·348	3·780	23·238	8·143	17·544	·01852
55	3025	166375	7·416	3·803	23·452	8·193	17·652	·01818
56	3136	175616	7.485	3·826	23·664	8·243	17·758	·01786
57	3249	185193	7·550	3·849	23·875	8·291	17·863	·01754
58	3364	195112	7·616	3·871	24·083	8·340	17·967	·01724
59	3481	205379	7·681	3·893	24·290	8·387	18·070	·01667
60	3600	216000	7·746	3·915	24·495	8·434	18·171	·01667
61	3721	226981	7·810	3·936	24·698	8·481	18·272	·01639
62	3844	232328	7·874	3·958	24·900	8·527	18·371	·01613
63	3969	250047	7·937	3·979	25·100	8·573	18·469	·01587
64	4096	262144	8·000	4·000	25·298	8·618	18·566	·01562
65	4225	274625	8·062	4·021	25·495	8·662	18·663	·01538
66	4356	287496	8·124	4·041	25·690	8·707	18·758	·01515
67	4489	300763	8·185	4·062	25·884	8·750	18·852	·01493
68	4624	314432	8·246	4·082	26·077	8·794	18·945	·01471
69	4761	328509	8·307	4·102	26·268	8·837	19·038	·01449
70	4900	343000	8·367	4·121	26·458	8·879	19·129	·01429
71	5041	357911	8·426	4·141	26·646	8·921	19·220	·01408
72	5184	373248	8·485	4·160	26·833	8·963	19·310	·01389
73	5329	389017	8·544	4·179	27·010	9·004	19·399	·01370
74	5476	405224	8·602	4·198	27·203	9·045	19·487	·01351
75	5625	421875	8·660	4·217	27·386	9·086	19·574	·01333
76	5776	438976	8·718	4·236	27·568	9·126	19·661	·01316
77	5929	456533	8·775	4·254	27·749	9·166	19·747	·01299
78	6084	474552	8·832	4·273	27·928	9·205	19·832	·01282
79	6241	493039	8·888	4·291	28·107	9·244	19·916	·01266
80	6400	512000	8·944	4·309	28·284	9·283	20·000	·01250
81	6561	531441	9·000	4·327	28·460	9·322	20·083	·01235
82	6724	551368	9·055	4·344	28·636	9·360	20·165	·01220
83	6889	571787	9·110	4·362	28·810	9·398	20·247	·01205
84	7056	592704	9·165	4·380	28·983	9·435	20·328	·01190
85	7225	614125	9·220	4·397	29·155	9·473	20·408	·01176
86	7396	636056	9·274	4·414	29·326	9·510	20·488	·01163
87	7569	658503	9·327	4·431	29·426	9·546	20·567	·01149
88	7744	681472	9·381	4·448	29·665	9·583	20·646	·01136
89	7921	704969	9·434	4·465	29·833	9·619	20·724	·01124
90	8100	729000	9·487	4·481	30·000	9·655	20·801	·01111
91	8281	753571	9·539	4·498	30·166	9·691	20·878	·01099
92	8464	778688	9·592	4·514	30·332	9·726	20·954	·01087
93	8949	804357	9·644	4·531	30·496	9·761	21·029	·01075
94	8836	830584	9·695	4·547	30·659	9·796	21·105	·01064
95	9025	857375	9·747	4·563	30·822	9·830	21·179	·01053
96	9216	884736	9·798	4·572	30·984	9·865	21·253	·01042
97	9409	912673	9·849	4·595	31·145	9·899	21·327	·01031
98	9604	941192	9·899	4·610	31·305	9·933	21·400	·01020
99	9801	970299	9·950	4·626	31·464	9·967	21·472	·01010
100	10000	1000000	10·000	4·642	31·623	10·000	21·544	·01000

வர்க்கங்கள்
SQUARES

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1000	1020	1040	1061	1082	1103	1124	1145	1166	1188
11	1210	1232	1254	1277	1300	1323	1346	1369	1392	1416
12	1440	1464	1488	1513	1538	1563	1588	1613	1638	1664
13	1690	1716	1742	1769	1796	1823	1850	1877	1904	1932
14	1960	1988	2016	2045	2074	2103	2132	2161	2190	2220
15	2250	2280	2310	2341	2372	2403	2434	2465	2496	2528
16	2560	2592	2624	2657	2690	2723	2756	2789	2822	2856
17	2890	2924	2958	2993	3028	3063	3098	3133	3168	3204
18	3240	3276	3312	3349	3386	3423	3460	3497	3534	3572
19	3610	3648	3686	3725	3764	3803	3842	3881	3920	3960
20	4000	4040	4080	4121	4162	4203	4244	4285	4326	4368
21	4410	4452	4494	4537	4580	4623	4666	4709	4752	4796
22	4840	4884	4928	4973	5018	5063	5108	5153	5198	5244
23	5290	5336	5382	5429	5476	5523	5570	5617	5664	5712
24	5760	5808	5856	5905	5954	6003	6052	6101	6150	6200
25	6250	6300	6350	6401	6452	6503	6554	6605	6656	6708
26	6760	6812	6864	6917	6970	7023	7076	7129	7182	7236
27	7290	7344	7398	7453	7508	7563	7618	7673	7728	7784
28	7840	7896	7952	8009	8066	8123	8180	8237	8294	8352
29	8410	8468	8526	8585	8644	8703	,8762	8821	8880	8940
30	9000	9060	9120	9181	9242	9303	9364	9425	9486	9548
31	9610	9672	9734	9797	9860	9923	9986	1005	1011	1018
32	1024	1030	1037	1043	1050	1056	1063	1069	1076	1082
33	1089	1096	1102	1109	1116	1122	1129	1136	1142	1149
34	1156	1163	1170	1176	1183	1190	1197	1204	1211	1218
35	1225	1232	1239	1246	1253	1260	1267	1274	1282	1289
36	1296	1303	1310	1318	1325	1332	1340	1347	1354	1362
37	1369	1376	1384	1391	1399	1406	1414	1421	1429	1436
38	1444	1452	1459	1467	1475	1482	1490	1498	1505	1513
39	1521	1529	1537	1544	1552	1560	1568	1576	1584	1592
40	1600	1608	1616	1624	1632	1640	1648	1656	1665	1673
41	1681	1689	1697	1706	1714	1722	1731	1739	1747	1756
42	1764	1772	1781	1789	1798	1806	1815	1823	1832	1840
43	1849	1858	1866	1875	1884	1892	1901	1910	1918	1927
44	1936	1945	1954	1962	1971	1980	1989	1998	2007	2016
45	2025	2034	2043	2052	2061	2070	2079	2088	2098	2107
46	2116	2125	2134	2144	2153	2162	2172	2181	2190	2200
47	2209	2218	2228	2237	2247	2256	2266	2275	2285	2294
48	2304	2314	2323	2333	2343	2352	2362	2372	2381	2391
49	2401	2411	2421	2430	2440	2450	2460	2470	2480	2490
50	2500	2510	2520	2530	2540	2550	2560	2570	2581	2591
51	2601	2611	2621	2632	2642	2652	2663	2673	2683	2694
52	2704	2714	2725	2735	2746	2756	2767	2777	2788	2798
53	2809	2820	2830	2841	2852	2862	2873	2884	2894	2905
54	2916	2927	2938	2948	2959	2970	2981	2992	3003	3014

வர்க்கங்கள்
SQUARES

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	3025	3036	3047	3058	3069	3080	3091	3102	3114	3125
56	3136	3147	3158	3170	3181	3192	3204	3215	3226	3238
57	3249	3260	3272	3283	3295	3306	3318	3329	3341	3352
58	3364	3376	3387	3399	3411	3422	3434	3446	3457	3469
59	3481	3493	3505	3516	3528	3540	3552	3564	3576	3588
60	3600	3612	3624	3636	3648	3660	3672	3684	3697	3709
61	3721	3733	3745	3758	3770	3782	3795	3807	3819	3832
62	3844	3856	3869	3881	3894	3906	3919	3931	3944	3956
63	3969	3982	3994	4007	4020	4032	4045	4058	4070	4083
64	4096	4109	4122	4134	4147	4160	4173	4186	4199	4212
65	4225	4238	4251	4264	4277	4290	4303	4316	4330	4343
66	4356	4369	4382	4396	4409	4422	4436	4449	4462	4476
67	4489	4502	4516	4529	4543	4556	4570	4583	4597	4610
68	4624	4638	4651	4665	4679	4692	4706	4720	4733	4747
69	4761	4775	4789	4802	4816	4830	4844	4858	4872	4886
70	4900	4914	4928	4942	4956	4970	4984	4998	5013	5027
71	5041	5055	5069	5084	5098	5112	5127	5141	5155	5170
72	5184	5198	5213	5227	5242	5256	5271	5285	5300	5314
73	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	5461
74	5476	5491	5506	5520	5535	5550	5565	5580	5595	5610
75	5625	5640	5655	5670	5685	5700	5715	5730	5746	5761
76	5776	5791	5806	5822	5837	5852	5868	5883	5898	5914
77	5929	5944	5960	5975	5991	6006	6022	6037	6053	6068
78	6084	6100	6115	6131	6147	6162	6178	6194	6209	6225
79	6241	6257	6273	6288	6304	6320	6336	6352	6368	6384
80	6400	6416	6432	6448	6464	6480	6496	6512	6529	6545
81	6561	6577	6593	6610	6626	6642	6659	6675	6691	6708
82	6724	6740	6757	6773	6790	6806	6823	6839	6856	6872
83	6889	6906	6922	6939	6956	6972	6989	7006	7022	7039
84	7056	7073	7090	7106	7123	7140	7157	7174	7191	7208
85	7225	7242	7259	7279	7292	7310	7327	7344	7362	7379
86	7396	7413	7430	7448	7465	7482	7500	7517	7534	7552
87	7569	7586	7604	7621	7039	7656	7674	7691	7709	7726
88	7744	7762	7779	7797	7815	7832	7850	7868	7885	7903
89	7921	7939	7957	7974	7992	8010	8028	8046	8064	8082
90	8100	8118	8136	8154	8172	8190	8208	8226	8245	8263
91	8281	8299	8317	8336	8354	8372	8391	8409	8427	8446
92	8464	8482	8501	8519	8538	8556	8575	8593	8612	8630
93	8649	8668	8686	8705	8724	8742	8761	8780	8798	8817
94	8836	8855	8874	8892	8911	8930	8949	8968	8987	9006
95	9025	9044	9063	9082	9101	9120	9139	9158	9178	9197
96	9216	9235	9254	9274	9293	9312	9332	9351	9370	9390
97	9409	9428	9448	9467	9487	9506	9526	9545	9565	9584
98	9604	9624	9643	9663	9683	9702	9722	9742	9761	9781
99	9801	9821	9841	9860	9880	9900	9920	9940	9960	9980

வர்க்க மூலங்கள் 1—10 வரை
SQ. ROOTS FROM 1 TO 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
1·0	1·000	1·005	1·010	1·015	1·020	1·025	1·030	1·034	1·039	1·044	0 1 1	2 2 3	3 4 4
1·1	1·049	1·054	1·058	1·063	1·068	1·072	1·077	1·082	1·086	1·091	0 1 1	2 2 3	3 4 4
1·2	1·095	1·100	1·105	1·109	1·114	1·118	1·122	1·127	1·131	1·136	0 1 1	2 2 3	3 4 4
1·3	1·140	1·145	1·149	1·153	1·158	1·162	1·166	1·170	1·175	1·179	0 1 1	2 2 3	3 3 4
1·4	1·183	1·187	1·192	1·196	1·200	1·204	1·208	1·212	1·217	1·221	0 1 1	2 2 2	3 3 4
1·5	1·225	1·229	1·233	1·237	1·241	1·245	1·249	1·253	1·257	1·261	0 1 1	2 2 2	3 3 4
1·6	1·265	1·269	1·273	1·277	1·281	1·285	1·288	1·292	1·296	1·300	0 1 1	2 2 2	3 3 3
1·7	1·304	1·308	1·311	1·315	1·319	1·323	1·327	1·330	1·334	1·338	0 1 1	2 2 2	3 3 3
1·8	1·342	1·345	1·349	1·353	1·356	1·360	1·364	1·367	1·371	1·375	0 1 1	1 2 2	3 3 3
1·9	1·378	1·382	1·386	1·389	1·393	1·396	1·400	1·404	1·407	1·411	0 1 1	1 2 2	3 3 3
2·0	1·414	1·418	1·421	1·425	1·428	1·432	1·435	1·439	1·442	1·446	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·1	1·449	1·453	1·456	1·459	1·463	1·466	1·470	1·473	1·476	1·480	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·2	1·483	1·487	1·490	1·493	1·497	1·500	1·503	1·507	1·510	1·513	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·3	1·517	1·520	1·523	1·526	1·530	1·533	1·536	1·539	1·543	1·546	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·4	1·549	1·552	1·556	1·559	1·562	1·565	1·568	1·572	1·575	1·578	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·5	1·581	1·584	1·587	1·591	1·594	1·597	1·600	1·603	1·606	1·609	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·6	1·612	1·616	1·619	1·622	1·625	1·628	1·631	1·634	1·637	1·640	0 1 1	1 2 2	2 2 3
2·7	1·643	1·646	1·649	1·652	1·655	1·658	1·661	1·664	1·667	1·670	0 1 1	1 2 2	2 2 3
2·8	1·673	1·676	1·679	1·682	1·685	1·688	1·691	1·694	1·697	1·700	0 1 1	1 1 2	2 2 3
2·9	1·703	1·706	1·709	1·712	1·715	1·718	1·720	1·723	1·726	1·729	0 1 1	1 1 2	2 2 3
3·0	1·732	1·735	1·738	1·741	1·744	1·746	1·749	1·752	1·755	1·758	0 1 1	1 1 2	2 2 3
3·1	1·761	1·764	1·766	1·769	1·772	1·775	1·778	1·780	1·783	1·786	0 1 1	1 1 2	2 2 3
3·2	1·789	1·792	1·794	1·797	1·800	1·803	1·806	1·808	1·811	1·814	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·3	1·817	1·819	1·822	1·825	1·828	1·830	1·833	1·836	1·838	1·841	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·4	1·844	1·847	1·849	1·852	1·855	1·857	1·860	1·863	1·865	1·868	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·5	1·871	1·873	1·876	1·879	1·881	1·884	1·887	1·889	1·892	1·895	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·6	1·897	1·900	1·903	1·905	1·908	1·910	1·913	1·916	1·918	1·921	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·7	1·924	1·926	1·929	1·931	1·934	1·936	1·939	1·942	1·944	1·947	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·8	1·949	1·952	1·954	1·957	1·960	1·962	1·965	1·967	1·970	1·972	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·9	1·975	1·977	1·980	1·982	1·985	1·987	1·990	1·992	1·995	1·997	0 1 1	1 1 2	2 2 2
4·0	2·000	2·002	2·005	2·007	2·010	2·012	2·015	2·017	2·020	2·022	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·1	2·025	2·027	2·030	2·032	2·035	2·037	2·040	2·042	2·045	2·047	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·2	2·049	2·052	2·054	2·057	2·059	2·062	2·064	2·066	2·069	2·071	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·3	2·074	2·076	2·078	2·081	2·083	2·086	2·088	2·090	2·093	2·095	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·4	2·093	2·100	2·102	2·105	2·107	2·110	2·112	2·114	2·117	2·119	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·5	2·121	2·124	2·126	2·128	2·131	2·133	2·135	2·138	2·140	2·142	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·6	2·145	2·147	2·149	2·152	2·154	2·156	2·159	2·161	2·163	2·166	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·7	2·168	2·170	2·173	2·175	2·177	2·179	2·182	2·184	2·186	2·189	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·8	2·191	2·193	2·195	2·198	2·200	2·202	2·205	2·207	2·209	2·211	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·9	2·214	2·216	2·218	2·220	2·223	2·225	2·227	2·229	2·232	2·234	0 0 1	1 1 1	2 2 2
5·0	2·236	2·238	2·241	2·243	2·245	2·247	2·249	2·252	2·254	2·256	0 0 1	1 1 1	2 2 2
5·1	2·258	2·261	2·263	2·265	2·267	2·269	2·272	2·274	2·276	2·278	0 0 1	1 1 1	2 2 2
5·2	2·280	2·283	2·285	2·287	2·289	2·291	2·293	2·296	2·298	2·300	0 0 1	1 1 1	2 2 2
5·3	2·302	2·304	2·307	2·309	2·311	2·313	2·315	2·317	2·319	2·322	0 0 1	1 1 1	2 2 2
5·4	2·324	2·326	2·328	2·330	2·332	2·335	2·337	2·339	2·341	2·343	0 0 1	1 1 1	2 2 2

வர்க்க மூலங்கள் 1—10 வரை

SQ. ROOTS FROM 1 TO 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
5·5	2·345	2·347	2·349	2·352	2·354	2·356	2·358	2·360	2·362	2·364	0 0 1	1 1 1	1 2 2
5·6	2·366	2·369	2·371	2·373	2·375	2·377	2·379	2·381	2·383	2·385	0 0 1	1 1 1	1 2 2
5·7	2·387	2·390	2·392	2·394	2·396	2·398	2·400	2·402	2·404	2·406	0 0 1	1 1 1	1 2 2
5·8	2·408	2·410	2·412	2·415	2·417	2·419	2·421	2·423	2·425	2·427	0 0 1	1 1 1	1 2 2
5·9	2·429	2·431	2·433	2·435	2·437	2·439	2·441	2·443	2·445	2·447	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·0	2·449	2·452	2·454	2·456	2·458	2·460	2·462	2·464	2·466	2·468	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·1	2·470	2·472	2·474	2·476	2·478	2·480	2·482	2·484	2·486	2·488	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·2	2·490	2·492	2·494	2·496	2·498	2·500	2·502	2·504	2·506	2·508	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·3	2·510	2·512	2·514	2·516	2·518	2·520	2·522	2·524	2·526	2·528	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·4	2·530	2·532	2·534	2·536	2·538	2·540	2·542	2·544	2·546	2·548	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·5	2·550	2·551	2·553	2·555	2·557	2·559	2·561	2·563	2·565	2·567	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·6	2·569	2·571	2·573	2·575	2·577	2·579	2·581	2·583	2·585	2·587	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·7	2·588	2·590	2·592	2·594	2·596	2·598	2·600	2·602	2·604	2·606	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·8	2·608	2·610	2·612	2·613	2·615	2·617	2·619	2·621	2·623	2·625	0 0 1	1 1 1	1 2 2
6·9	2·627	2·629	2·631	2·632	2·634	2·636	2·638	2·640	2·642	2·644	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·0	2·646	2·648	2·650	2·651	2·653	2·655	2·657	2·659	2·661	2·663	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·1	2·665	2·666	2·668	2·670	2·672	2·674	2·676	2·678	2·680	2·681	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·2	2·683	2·685	2·687	2·689	2·691	2·693	2·694	2·696	2·698	2·700	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·3	2·702	2·704	2·706	2·707	2·709	2·711	2·713	2·715	2·717	2·718	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·4	2·720	2·722	2·724	2·726	2·728	2·729	2·731	2·733	2·735	2·737	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·5	2·739	2·740	2·742	2·744	2·746	2·748	2·750	2·751	2·753	2·755	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·6	2·757	2·759	2·760	2·762	2·764	2·766	2·768	2·769	2·771	2·773	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·7	2·775	2·777	2·778	2·780	2·782	2·784	2·786	2·787	2·289	2·791	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·8	2·793	2·795	2·796	2·798	2·800	2·802	2·804	2·805	2·807	2·809	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·9	2·811	2·812	2·814	2·816	2·818	2·820	2·821	2·823	2·825	2·827	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·0	2·828	2·830	2·832	2·834	2·835	2·837	2·839	2·841	2·843	2·844	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·1	2·846	2·848	2·850	2·851	2·853	2·855	2·857	2·853	2·860	2·862	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·2	2·864	2·865	2·867	2·869	2·871	2·872	2·874	2·876	2·877	2·879	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·3	2·881	2·883	2·884	2·886	2·888	2·890	2·891	2·893	2·895	2·897	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·4	2·898	2·900	2·902	2·903	2·905	2·907	2·909	2·910	2·912	2·914	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·5	2·915	2·917	2·919	2·921	2·922	2·924	2·926	2·827	2·929	2·931	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·6	2·933	2·934	2·936	2·938	2·939	2·941	2·943	2·944	2·946	2·948	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·7	2·950	2·951	2·953	2·955	2·956	2·958	2·960	2·961	2·963	2·965	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·8	2·966	2·968	2·970	2·972	2·973	2·975	2·977	2·978	2·980	2·982	0 0 1	1 1 1	1 1 2
8·9	2·983	2·985	2·987	2·988	2·990	2·992	2·993	2·995	2·997	2·998	0 0 1	1 1 1	1 1 2
9·0	3·000	3·002	3·003	3·005	3·007	3·008	3·010	3·012	3·013	3·015	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·1	3·017	3·018	3·020	3·022	3·023	3·025	3·027	3·028	3·030	3·032	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·2	3·033	3·035	3·036	3·038	3·040	3·041	3·043	3·045	3·046	3·048	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·3	3·050	3·051	3·053	3·055	3·056	3·058	3·059	3·061	3·064	3·064	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·4	3·066	3·068	3·069	3·071	3·072	3·074	3·076	3·077	3·079	3·081	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·5	3·082	3·084	3·085	3·087	3·089	3·090	3·092	3·094	3·095	3·097	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·6	3·098	3·100	3·102	3·103	3·105	3·106	3·108	3·110	3·111	3·113	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·7	3·114	3·116	3·118	3·119	3·121	3·122	3·124	3·126	3·127	3·129	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·8	3·130	3·132	3·134	3·135	3·137	3·138	3·140	3·142	3·143	3·145	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·9	3·146	3·148	3·150	3·151	3·153	3·154	3·156	3·158	3·159	3·161	0 0 0	1 1 1	1 1 1

வர்க்க மூலங்கள் 10—100 வரை

SQ ROOTS FROM 10 TO 100

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	o	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	3·162	3·178	3·194	3·209	3·225	3·240	3·256	3·271	3·286	3·302	2 3 5	6 8 9	11 12 14
11	3·317	3·332	3·347	3·362	3·376	3·391	3·406	3·421	3·435	3·450	1 3 4	6 7 9	10 12 13
12	3·464	3·479	3·493	3·507	3·521	3·536	3·550	3·564	3·578	3·592	1 3 4	6 7 8	10 11 13
13	3·606	3·619	3·633	3·647	3·661	3·674	3·688	3·701	3·715	3·728	1 3 4	5 7 8	10 11 12
14	3·742	3·755	3·768	3·782	3·795	3·808	3·821	3·834	3·847	3·860	1 3 4	5 7 8	9 11 12
15	3·873	3·886	3·899	3·912	3·924	3·937	3·950	3·962	3·975	3·987	1 3 4	5 6 8	9 10 11
16	4·000	4·012	4·025	4·037	4·050	4·062	4·074	4·087	4·099	4·111	1 2 4	5 6 7	9 10 11
17	4·123	4·135	4·147	4·159	4·171	4·183	4·195	4·207	4·219	4·231	1 2 3	5 6 7	8 10 11
18	4·243	4·254	4·266	4·278	4·290	4·301	4·313	4·324	4·336	4·347	1 2 3	5 6 7	8 9 10
19	4·359	4·370	4·382	4·393	4·405	4·416	4·427	4·438	4·450	4·461	1 2 3	5 6 7	8 9 10
20	4·472	4·483	4·494	4·506	4·517	4·528	4·539	4·550	4·561	4·572	1 2 3	4 6 7	8 9 10
21	4·583	4·593	4·604	4·615	4·626	4·637	4·648	4·658	4·669	4·680	1 2 3	4 5 6	8 9 10
22	4·690	4·701	4·712	4·722	4·733	4·743	4·754	4·764	4·775	4·785	1 2 3	4 5 6	7 8 9
23	4·796	4·806	4·817	4·827	4·837	4·848	4·858	4·868	4·879	4·889	1 2 3	4 5 6	7 8 9
24	4·899	4·909	4·919	4·930	4·940	4·950	4·960	4·970	4·980	4·990	1 2 3	4 5 6	7 8 9
25	5·000	5·010	5·020	5·030	5·040	5·050	5·060	5·070	5·079	5·089	1 2 3	4 5 6	7 8 9
26	5·099	5·109	5·119	5·128	5·138	5·148	5·158	5·167	5·177	5·187	1 2 3	4 5 6	7 8 9
27	5·196	5·206	5·215	5·225	5·235	5·244	5·254	5·263	5·273	5·282	1 2 3	4 5 6	7 8 9
28	5·292	5·301	5·310	5·320	5·329	5·339	5·348	5·357	5·367	5·376	1 2 3	4 5 6	7 7 8
29	5·385	5·394	5·404	5·413	5·422	5·431	5·441	5·450	5·459	5·468	1 2 3	4 5 5	6 7 8
30	5·477	5·486	5·495	5·505	5·514	5·523	5·532	5·541	5·550	5·559	1 2 3	4 4 5	6 7 8
31	5·568	5·577	5·586	5·595	5·604	5·612	5·621	5·630	5·639	5·648	1 2 3	3 4 5	6 7 8
32	5·657	5·666	5·675	5·683	5·692	5·701	5·710	5·718	5·727	5·736	1 2 3	3 4 5	6 7 8
33	5·745	5·753	5·762	5·771	5·779	5·788	5·797	5·805	5·814	5·822	1 2 3	3 4 5	6 7 8
34	5·831	5·840	5·848	5·857	5·865	5·874	5·882	5·891	5·899	5·908	1 2 3	3 4 5	6 7 8
35	5·916	5·925	5·933	5·941	5·950	5·958	5·967	5·975	5·983	5·992	1 2 2	3 4 5	6 7 8
36	6·000	6·008	6·017	6·025	6·033	6·042	6·050	6·058	6·066	6·075	1 2 2	3 4 5	6 7 7
37	6·083	6·091	6·099	6·107	6·116	6·124	6·132	6·140	6·148	6·156	1 2 2	3 4 5	6 7 7
38	6·164	6·173	6·181	6·189	6·197	6·205	6·213	6·221	6·229	6·237	1 2 2	3 4 5	6 6 7
39	6·245	6·253	6·261	6·269	6·277	6·285	6·293	6·301	6·309	6·317	1 2 2	3 4 5	6 6 7
40	6·325	6·332	6·340	6·348	6·356	6·364	6·372	6·380	6·389	6·395	1 2 2	3 4 5	6 6 7
41	6·403	6·411	6·419	6·427	6·434	6·442	6·450	6·458	6·465	6·473	1 2 2	3 4 5	5 6 7
42	6·481	6·488	6·496	6·504	6·512	6·519	6·527	6·535	6·542	6·550	1 2 2	3 4 5	5 6 7
43	6·557	6·565	6·573	6·580	6·588	6·595	6·603	6·611	6·618	6·626	1 2 2	3 4 5	5 6 7
44	6·633	6·641	6·648	6·656	6·663	6·671	6·678	6·686	6·693	6·701	1 2 2	3 4 5	5 6 7
45	6·708	6·716	6·723	6·731	6·738	6·745	6·753	6·760	6·768	6·775	1 1 2	3 4 4	5 6 7
46	6·782	6·790	6·797	6·804	6·812	6·819	6·826	6·834	6·841	6·848	1 1 2	3 4 4	5 6 7
47	6·856	6·863	6·870	6·877	6·885	6·892	6·899	6·907	6·914	6·921	1 1 2	3 4 4	5 6 7
48	6·928	6·935	6·943	6·950	6·957	6·964	6·971	6·979	6·986	6·993	1 1 2	3 4 4	5 6 6
49	7·000	7·007	7·014	7·021	7·029	7·036	7·043	7·050	7·057	7·064	1 1 2	3 4 4	5 6 6
50	7·071	7·078	7·085	7·092	7·099	7·106	7·113	7·120	7·127	7·134	1 1 2	3 4 4	5 6 6
51	7·141	7·148	7·155	7·162	7·169	7·176	7·183	7·190	7·197	7·204	1 1 2	3 4 4	5 6 6
52	7·211	7·218	7·225	7·232	7·239	7·246	7·253	7·259	7·266	7·273	1 1 2	3 3 4	5 6 6
53	7·280	7·287	7·294	7·301	7·308	7·314	7·321	7·328	7·335	7·342	1 1 2	3 3 4	5 5 6
54	7·348	7·355	7·362	7·369	7·376	7·382	7·389	7·396	7·403	7·409	1 1 2	3 3 4	5 5 [illegible]

வர்க்க மூலங்கள் 10—100 வரை

SQ ROOTS FROM 10 TO 100

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
55	7·416	7·423	7·430	7·436	7·443	7·450	7·457	7·463	7·470	7·477	1 1 2	3 3 4	5 5 6
56	7·483	7·490	7·497	7·503	7·510	7·517	7·523	7 530	7·537	7·543	1 1 2	3 3 4	5 5 6
57	7·550	7·556	7·563	7·570	7·576	7·583	7·589	7 596	7·603	7·609	1 1 2	3 3 4	5 5 6
58	7·616	7·622	7·629	7·635	7·642	7·649	7·655	7·662	7·668	7·675	1 1 2	3 3 4	5 5 6
59	7·681	7·688	7·694	7·701	7·707	7·714	7·720	7·727	7·733	7·740	1 1 2	3 3 4	4 5 6
60	7·746	7·752	7·759	7·765	7·772	7·778	7·785	7·791	7·797	7·804	1 1 2	3 3 4	4 5 6
61	7·810	7·817	7·823	7·829	7·836	7·842	7·849	7·855	7·861	7·868	1 1 2	3 3 4	4 5 6
62	7·874	7·880	7·887	7·893	7·899	7·906	7·912	7·918	7·925	7·931	1 1 2	3 3 4	4 5 6
63	7·937	7·944	7·950	7·956	7·962	7·969	7·975	7·981	7·987	7·994	1 1 2	3 3 4	4 5 6
64	8·000	8·006	8·012	8·019	8·025	8·031	8·037	8·044	8·050	8·056	1 1 2	2 3 4	4 5 6
65	8·062	8·068	8·075	8·081	8·087	8·093	8·099	8·106	8·112	8·118	1 1 2	2 3 4	4 5 6
66	8·124	8·130	8·136	8·142	8·149	8·155	8·161	8·167	8·173	8·179	1 1 2	2 3 4	4 5 5
67	8·185	8·191	8·198	8·204	8·210	8·216	8·222	8·228	8·234	8·240	1 1 2	2 3 4	4 5 5
68	8·246	8·252	8·258	8·264	8·270	8·276	8·283	8·289	8·295	8·301	1 1 2	2 3 4	4 5 5
69	8·907	8·313	8·319	8·325	8·331	8·337	8·343	8·349	8·355	8·361	1 1 2	2 3 4	4 5 5
70	8·367	8·373	8·379	8·385	8·390	8·396	8·402	8·408	8·414	8·420	1 1 2	2 3 4	4 5 5
71	8·426	8·432	8·438	8·444	8·450	8·456	8·462	8·468	8·473	8·479	1 1 2	2 3 3	4 5 5
72	8·485	8·491	8·497	8·503	8·509	8·515	8·521	8·526	8·532	8·538	1 1 2	2 3 3	4 5 5
73	8·544	8·550	8·556	8·562	8·567	8·573	8·579	8·585	8·591	8·597	1 1 2	2 3 3	4 5 5
74	8·602	8·608	8·614	8·620	8·626	8·631	8·637	8·643	8·649	8·654	1 1 2	2 3 3	4 5 5
75	8·660	8·666	8·672	8·678	8·683	8·689	8·695	8·701	8·706	8·712	1 1 2	2 3 3	4 5 5
76	8·718	8·724	8·729	8·735	8·741	8·746	8·752	8·758	8·764	8·769	1 1 2	2 3 3	4 5 5
77	8·775	8·781	8·786	8·792	8·798	8·803	8·809	8·815	8·820	8·826	1 1 2	2 3 3	4 4 5
78	8·832	8·837	8·843	8·849	8·854	8·860	8·866	8·871	8·877	8·883	1 1 2	2 3 3	4 4 5
79	8·888	8·894	8·899	8·905	8·911	8·916	8·922	8·927	8·933	8·939	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	8·944	8·950	8·955	8·961	8·967	8·972	8·978	8·983	8·989	8·99	1 1 7	2 3 3	4 4 5
81	9·000	9·006	9·011	9·017	9·022	9·028	9·033	9·039	9·044	9·050	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9·055	9·061	9·066	9·072	9·077	9·083	9·088	9·094	9·099	9·105	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83	9·110	9·116	9·121	9·127	9·132	9·138	9·143	9·149	9·154	9·160	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9·165	9·171	9·176	9·182	9·187	9·192	9·198	9·203	9·209	9·214	1 1 2	2 3 2	4 4 5
85	9·220	9·225	9·230	9·236	9·241	9·247	9·252	9·257	9·263	9·268	1 1 2	2 3 3	4 4 5
86	9·274	9·279	9·284	9·290	9·295	9·301	9·306	9·311	9·317	9·322	1 1 2	2 3 3	4 4 5
87	9·327	9·333	9·338	9·343	9·349	9·354	9·359	9·365	9·370	9·375	1 1 2	2 3 3	4 4 5
88	9·381	9·386	9·391	9·397	9 402	9·407	9·413	9·418	9·423	9·429	1 1 2	2 3 3	4 4 5
89	9·434	9·439	9·445	9·450	9·455	9·460	9·466	9·471	9·476	9·482	1 1 2	2 3 3	4 4 5
90	9·487	9·492	9·497	9·503	9·508	9·513	9·518	9·524	9·529	9·534	1 1 2	2 3 3	4 4 5
91	9·539	9·545	9·550	9·555	9·560	9·566	9·571	9·576	9·581	9·586	1 1 2	2 3 3	4 4 5
92	9·592	9·597	9·602	9·607	9·612	9·618	9·623	9·628	9·633	9·638	1 1 2	2 3 3	4 4 5
93	9·644	9·649	9·654	9·659	9 664	9·670	9·675	9·680	9·685	9·690	1 1 2	2 3 3	4 4 5
94	9·695	9·701	9·706	9·711	9·716	9·721	9·726	9 731	9·737	9.742	1 1 2	2 3 3	4 4 5
95	9·747	9·752	9·757	9·762	9·767	9·772	9·778	9·783	9·788	9·793	1 1 2	2 3 3	4 4 5
96	9·798	9·803	9·808	9·813	9 818	9·823	9·829	9·834	9·839	9·844	1 1 2	2 3 3	4 4 5
97	9·849	9·854	9·859	9·864	9 869	9·874	9·879	9·884	9·889	9·894	1 1 1	2 3 3	4 4 5
98	9·899	9·905	9·910	9·915	9·920	9·925	9·930	9·935	9·940	9·945	0 1 1	2 2 3	3 4 4
99	9·950	9·955	9·960	9·965	9·970	9.975	9·980	9·985	9·990	9·995	0 1 1	2 2 3	3 4 4

எண்களின் தலைகீழ்ப் பின்னங்கள் 1—10 வரை

RECIPROCALS OF NOS FROM 1 TO 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	·1 000	·9901	·9804	·9709	·9615	·9524	·9434	·9346	9259	·9174									
1·1	·9091	·9099	·8929	·8850	·8772	·8696	·8621	·8547	.8475	·8403									
1·2	·8333	·8264	·8197	·8130	·8065	·8000	·7937	·7874	·7813	·7752									
1·3	·7692	·7634	·7576	·7519	·7463	·7407	·7353	·7299	·7246	·7194									
1·4	·7143	·7092	·7042	·6993	·6944	·6897	·6849	·6803	·6757	·6711	5	10	14	19	24	29	33	38	43
1·5	·6667	·6623	·6579	·6536	·6494	·6452	·6410	·6369	·6329	·6289	4	8	13	17	21	25	29	33	38
1·6	·6250	·6211	·6173	·6135	·6098	·6061	·6024	·5988	·5952	·5917	4	7	11	15	18	22	26	29	33
1·7	·5882	·5848	·5814	·5780	·5747	·5714	·5682	·5650	·5618	·5587	3	6	10	13	16	20	23	26	29
1·8	·5556	·5525	·5495	·5464	·5435	·5405	·5376	·5348	·5319	·5291	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1·9	·5263	·5236	·5208	·5181	·5155	·5128	·5102	·5076	·5051	·5025	3	5	8	11	13	16	18	21	24
2·0	·5000	·4975	·4950	·4926	·4902	·4878	·4854	·4831	·4808	·4785	2	5	7	10	12	14	17	19	21
2·1	·4762	·4739	·4717	·4695	·4673	·4651	·4630	·4608	·4587	·4566	2	4	7	9	11	13	15	17	20
2·2	·4545	·4525	·4505	·4484	·4464	·4444	·4425	·4405	·4386	·4367	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2·3	·4348	·4329	·4310	·4292	·4274	·4255	·4237	·4217	·4202	·4184	2	4	5	7	9	11	13	14	16
2·4	·4107	·4149	·4132	·4115	·4098	·4082	·4065	·4049	.4032	·4016	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2·5	·4000	·3984	·3968	·3953	·3937	·3922	·3906	·3891	·3876	·3861	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2·6	·3846	·3831	·3817	·3802	·3788	·3774	·3759	·3745	·3731	·3717	1	3	4	6	7	8	10	11	13
2·7	·3704	·3690	·3676	·3663	·3650	·3636	·3623	·3610	·3597	·3584	1	3	4	5	7	8	9	11	12
2·8	·3571	·3559	·3546	·3534	·3521	·3509	·3497	·3484	·3472	·3460	1	2	4	5	6	7	9	10	11
2·9	·3448	·3436	·3425	·3413	·3401	·3390	·3378	·3367	·3356	·3344	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3·0	·3333	·3322	·3311	·3300	·3289	·3279	·3268	·3257	·3247	·3236	1	2	3	4	5	6	7	9	10
3·1	·3226	·3215	·3205	·3195	·3185	·3175	·3165	·3155	·3145	·3135	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·2	·3125	·3115	·3106	·3096	·3086	·3077	·3067	·3058	·3049	·3040	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·3	·3030	·3021	·3012	·3003	·2994	·2985	·2976	·2967	·2959	·2950	1	2	3	4	4	5	6	7	8
3·4	·2941	·2933	·2924	·2915	·2907	·2899	·2890	·2882	·2874	·2865	1	2	3	3	4	5	6	7	8
3·5	·2857	·2849	·2841	·2833	·2825	·2817	·2809	·2801	·2793	·2786	1	2	2	3	4	5	6	6	7
3·6	·2778	·2770	·2762	·2755	·2747	·2740	·2732	·2725	·2717	·2710	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3·7	·2703	·2695	·2698	·2681	·2674	·2667	·2660	·2653	·2646	·2639	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3·8	·2632	·2625	·2618	.2611	·2604	·2597	·2591	·2584	·2577	·2571	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3·9	·2564	·2558	·2551	·2545	·2538	·2532	·2525	·2519	·2513	·2506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
4·0	·2500	·2494	·2488	·2481	·2475	·2469	·2463	·2457	·2451	·2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
4·1	·2439	·2433	·2427	·2421	·2415	·2410	·2404	·2398	·2392	·2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4·2	·2381	·2375	·2370	·2364	·2358	·2353	·2347	·2342	·2336	·2331	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·3	·2326	·2320	·2315	·2309	·2304	·2299	·2294	·2288	·2285	·2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·4	·2273	·2268	·2262	·2257	·2252	·2247	·2242	·2237	·2232	·2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·5	·2222	·2217	·2212	·2208	·2203	·2198	·2193	·2188	·2183	·2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·6	·2174	·2169	·2165	·2160	·2155	·2151	·2146	·2141	·2137	·2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·7	·2128	·2123	·2119	·2114	·2110	·2105	·2101	·2096	·2092	·2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·8	·2083	·2079	·2075	·2070	·2066	·2062	·2058	·2053	·2049	·2045	0	1	1	2	2	3	3	3	4
4·9	·2041	·2037	·2033	·2028	·2024	·2020	·2016	·2012	·2008	2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·0	·2000	·1996	·1992	·1988	·1984	·1980	·1976	·1972	·1691	·1965	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·1	·1961	·1957	·1953	·1949	·1946	·1942	·1938	·1934	·1931	·1927	0	1	1	2	2	2	3	3	3
5·2	·1923	·1919	·1916	·1912	·1908	·1905	·1901	·1898	·1894	·1890	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5·3	·1887	·1883	·1880	·1876	·1873	·1869	·1866	·1862	·1859	·1855	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5·4	·1852	·1848	·1845	·1842	·1838	·1835	·1832	·1828	·1825	·1821	0	1	1	1	2	2	2	3	3

எண்களின் தலைகீழ்ப் பின்னங்கள் 1—10 வரை
RECIPROCALS OF NOS 1 TO 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
5·5	·1818	·1815	·1812	·1808	·1805	·1802	·1799	·1795	·1792	·1789	0 1 1	1 2 2	2 3 3
5·6	·1786	·1783	·1779	·1776	·1773	·1770	·1767	·1764	·1761	·1757	0 1 1	1 2 2	2 3 3
5·7	·1754	·1751	·1748	·1745	·1742	·1739	·1736	·1733	·1730	·1727	0 1 1	1 1 2	2 2 3
5·8	·1724	·1721	·1718	·1715	·1712	·1709	·1706	·1704	·1701	·1668	0 1 1	1 1 2	2 2 3
5·9	·1695	·1692	·1689	·1686	1684	·1681	·1678	·1675	·1672	·1669	0 1 1	1 1 2	2 2 3
6·0	·1667	·1664	·1661	·1658	·1656	·1653	1650	·1647	·1645	·1642	0 1 1	1 1 2	2 2 3
6·1	·1639	·1637	·1634	·1631	·1629	·1626	·1623	·1621	·1618	·1616	0 1 1	1 1 2	2 2 2
6·2	·1613	·1610	·1608	·1605	·1603	·1600	·1597	·1595	·1592	·1590	0 1 1	1 1 2	2 2 2
6·3	·1587	·1585	·1582	·1580	·1577	·1575	·1572	·1570	·1567	·1565	0 1 1	1 1 1	2 2 2
6·4	·1562	·1560	·1558	·1555	·1553	·1550	·1548	·1546	·1543	·1541	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·5	·1538	·1536	·1534	·1531	·1529	·1527	·1524	·1522	·1520	·1517	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·6	·1515	·1513	·1511	·1508	·1506	·1504	·1502	·1499	·1497	·1495	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·7	·1493	·1490	·1488	·1486	·1484	·1481	·1479	·1477	·1475	·1473	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·8	·1471	·1468	·1466	·1464	·1462	·1460	·1458	·1456	·1453	·1451	0 0 1	1 1 1	2 2 2
6·9	·1449	·1447	·1445	·1443	·1441	·1439	·1437	·1435	·1433	·1431	0 0 1	1 1 1	2 2 2
7·0	·1429	·1427	·1425	·1422	·1420	·1418	·1416	·1414	·1412	·1410	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·1	·1408	·1406	·1404	·1403	·1401	·1399	·1397	·1395	·1393	·1391	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·2	·1389	·1387	·1385	·1383	·1381	1379	·1377	·1376	·1374	·1372	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·3	·1370	·1368	·1366	·1364	·1362	·1361	·1359	·1357	·1355	·1353	0 0 1	1 1 1	1 2 2
7·4	·1351	·1350	·1348	·1346	·1344	·1342	·1340	·1339	·1337	·1335	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·5	·1333	·1332	·1330	·1328	·1326	·1325	·1323	·1321	·1319	·1318	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·6	·1316	·1314	·1312	·1311	·1309	·1307	·1305	·1304	·1302	·1300	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·7	·1299	·1297	·1295	·1294	·1292	·1290	·1289	·1287	·1285	·1284	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·8	·1282	·1280	·1279	·1277	·1276	·1274	·1272	·1271	·1269	·1267	0 0 0	1 1 1	1 1 2
7·9	·1266	·1264	·1263	·1261	·1259	·1258	·1256	·1255	·1253	·1252	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·0	·1250	·1248	·1247	·1245	·1244	·1242	·1241	·1239	·1238	·1236	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·1	·1235	·1233	·1232	·1230	·1229	·1227	·1225	·1224	·1222	·1221	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·2	·1220	·1218	·1217	·1215	·1214	·1212	·1211	·1209	·1208	·1206	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·3	·1205	·1203	·1202	·1200	·1199	·1198	·1196	·1195	·1193	·1192	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·4	·1190	·1189	·1188	·1186	·1185	·1183	·1182	·1181	·1179	·1178	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·5	·1176	·1175	·1174	·1172	·1171	·1170	·1168	·1167	·1166	·1164	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·6	·1163	·1161	·1160	1159	·1157	·1156	·1155	·1153	·1152	·1151	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·7	·1149	·1148	·1147	·1145	·1144	·1143	·1142	·1140	·1139	·1138	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·8	·1136	·1135	·1134	·1133	·1131	·1130	·1129	·1127	·1126	·1125	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·9	·1124	·1122	·1121	·1120	·1119	·1117	·1116	·1115	·1114	·1112	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·0	·1111	·1110	·1109	·1107	·1106	·1105	·1104	·1103	1101	·1100	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·1	·1099	·1098	·1096	·1095	·1094	·1093	·1092	·1090	·1089	·1088	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·2	·1087	·1086	·1085	·1083	·1082	·1081	·1080	·1079	·1078	·1076	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·3	·1075	·1074	·1073	·1072	·1071	·1070	·1068	·1067	·1066	·1065	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·4	·1064	·1063	·1062	·1060	·1059	·1058	·1057	·1056	·1055	·1054	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·5	·1053	·1052	·1050	·1049	·1048	·1047	·1046	·1045	·1044	·1043	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·6	·1042	·1041	·1039	·1038	·1037	·1036	·1035	·1034	·1033	·1032	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·7	·1031	·1030	·1029	·1028	·1027	·1026	·1025	·1024	·1022	·1021	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·8	·1020	·1019	·1018	·1017	·1016	·1015	·1014	·1013	·1012	·1011	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·9	·1010	·1009	·1008	·1007	·1006	·1005	·1004	·1003	·1002	·1001	0 0 0	0 0 1	1 1 1